

# Pendekatan Numerik Gerak Kinematika Pendulum Pegas Tergandeng

N. W. Rini<sup>1,2</sup>, J. Saefan<sup>1</sup>, dan N. Khoiri<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1 Semarang

<sup>2</sup>E-mail: [nurwidyarini310@gmail.com](mailto:nurwidyarini310@gmail.com)

**Abstrak.** Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk menyelesaikan persamaan gerak sistem pendulum pegas bergandeng secara analitik. Sistem pendulum pegas terdandeng dibangun oleh dua bandul pendulum. Bandul pertama terhubung dengan tali yang dianggap tak bermassa dan bandul kedua terhubung dengan pegas yang terhubung dengan bandul pertama. Setelah memilih koordinat umum, peneliti menulis persamaan Lagrangian dalam koordinat umum tersebut. Persamaan gerak pendulum diperoleh dari analisis energi-energi yang ada pada sistem tersebut. Kemudian, persamaan gerak diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kuta orde 4.

*Kata kunci:* Lagrangian, pendulum, pegas.

**Abstract.** The main purpose of this work is to solve the equation of motion of the coupled-spring pendulum system analytically. The coupled-spring pendulum system was constructed by the two bobs of pendulums. The first mass was connected by the weightless rod to the fix point and the second pendulum was connected by a spring at the end of the first mass. After choosing generalized coordinate, we write the Lagrangian in those generalized coordinate. Kemudian, persamaan gerak diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kuta orde 4. Then we solved numerically using fourth order Runge-Kutta methods.

*Keywords:* Lagrangian, pendulum, spring.

## 1. Pendahuluan

Energi kinetik dan energi potensial memiliki peran penting dalam mekanika klasik. Konsep energi kinetik dan energi potensial dari sistem apapun memungkinkan kita untuk membangun persamaan Lagrangian dari suatu sistem. Konsep Lagrangian adalah perbedaan antara energi kinetik dan energi potensial. Jika dibandingkan dengan konsep mekanika Newton, konsep Lagrangian dalam suatu sistem mekanika klasik disebut dengan mekanika Lagrangian. Konsep ini memainkan peran penting dalam ilmu fisika. Hal ini dikarenakan persamaan Lagrangian bergantung pada besaran skalar, yaitu energi. Hal ini berbeda dengan mekanika Newton yang bergantung pada besaran vektor yang bekerja pada sistem seperti gaya. Persamaan Lagrangian digunakan untuk mempelajari dan menyelidiki sistem fisik. Sebagai hasil dari penerapan Lagrangian, akan diperoleh persamaan diferensial yang disebut persamaan Euler-Lagrange atau bisa disebut dengan persamaan gerak. Untuk sistem sederhana, persamaan gerak dapat diselesaikan secara analitik untuk nilai kondisi awal tertentu. Tetapi untuk sistem yang rumit, persamaan gerak perlu diselesaikan secara numerik.

Merujuk pada penelitian mekanika klasik sebelumnya, peneliti memecahkan dan mempelajari banyak sistem mekanik dengan menggunakan Lagrangian. Ada banyak penelitian yang menggunakan teknik analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial pada suatu sistem mekanika klasik. Sebagai contoh, Nenuwe [1] telah menurunkan persamaan gerak pada sistem pendulum pegas ganda menggunakan persamaan Lagrange. Sedangkan pada referensi [2], penulis menggunakan metode numerik Taylor dan Runge-Kutta untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang hanya memiliki satu variabel bebas. Selain itu, Espíndola dkk [3] juga menganalisis sistem pendulum ganda dengan variabel massa secara teoritik dan numerik.

Dalam penelitian ini, penulis menganalisis sistem pendulum pegas terdandeng. Kami menggunakan persamaan Lagrangian untuk mendapat persamaan gerak pada sistem pendulum pegas terdandeng. Pada awalnya, penulis memilih derajat kebebasan yang mewakili sistem. Setiap kondisi kendala (*constraint*) akan mengurangi jumlah derajat kebebasan sebanyak satu. Suatu sistem yang memiliki  $N$  partikel yang

bergerak bebas satu sama lain memiliki derajat kebebasan  $3N$ . Dan jika gerak mereka dibatasi oleh kondisi kendala  $k$ , maka jumlah derajat kebebasan yang sebenarnya dirumuskan oleh:

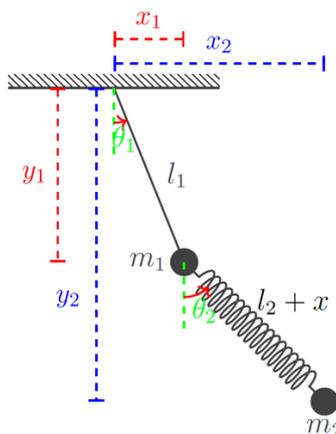
$$DK = 3N - k. \quad (1)$$

Kemudian penulis memilih koordinat umum sesuai dengan jumlah derajat kebebasan yang telah ditentukan.

Python adalah Bahasa pemrograman yang baik untuk komputasi. Bahasa pemrograman ini memiliki banyak *tool* dan *libraries* untuk memecahkan berbagai masalah. Dalam penelitian ini, penulis akan menggunakan Bahasa pemrograman Python untuk menyelesaikan sistem pendulum pegas tergantung secara numerik menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Plot grafik keluaran dibuat tergantung pada bagaimana kita ingin mengekspos sistem tersebut.

## 2. Deskripsi Fisik Sistem

Pendulum pegas tergantung adalah sistem mekanika klasik yang terdiri dari dua buah massa  $m_1$  dan  $m_2$  yang dipasang pada ujung pegas elastis yang dianggap tidak bermassa dengan konstanta pegas  $k$  dan sudut defleksi  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ . Massa pertama terhubung dengan tali tak bermassa dengan Panjang  $l_1$ . Massa kedua dihubungkan dengan pegas dengan konstanta pegas  $k$  dan panjang pegas  $l_2$  serta pertambahan Panjang pegas  $x$ . Penulis membatasi sistem hanya berayun pada bidang 2 dimensi di sepanjang bidang  $x$  dan  $y$ . Kedua massa pendulum dianggap sebagai bola kecil, sehingga volumenya dapat diabaikan. Pegas dihubungkan ke massa pertama dengan sebuah engsel tak bermassa, sehingga massa kedua dapat berayun. Model pada sistem ini diilustrasikan pada gambar 1.



**Figure 1.** Sistem pendulum pegas tergantung

Lagrangian  $\mathcal{L}$  didefinisikan menurut persamaan:

$$\mathcal{L} = T - V \quad (2)$$

Dimana  $T$  adalah energi kinetik dan  $V$  adalah energi potensial pada sistem. Kita dapat menggunakan sistem koordinat umum  $\theta_1, \theta_2$ , dan  $x$  untuk menuliskan kecepatan dan posisi dari kedua massa pada sistem. Energi kinetik dan potensial total sistem adalah jumlah energi dari kedua pendulum, pendulum sederhana dan pendulum dengan pegas.

Sebagai hasil dari sistem pendulum pegas tergantung,  $T$  dari dua massa dapat ditulis menurut persamaan:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (3)$$

Sedangkan  $V$  pada sistem pendulum pegas tergantung adalah:

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4), maka  $\mathcal{L}$  didefinisikan menurut persamaan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1gy_1 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (5)$$

### 3. Metode

Metode kajian pustaka dipilih dalam penelitian ini dengan menggunakan beberapa sumber literatur. Penelitian ini dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku, jurnal, dan referensi lain yang terkait. Tahap penelitian yang digunakan yaitu studi literatur, pengolahan informasi, dan merangkum kesimpulan.

Studi literatur yaitu tahapan pengumpulan literatur mengenai persamaan Lagrange dan persamaan differensial biasa/*ordinary differential equation* (ODE), dan derajat kebebasan. Pengolahan informasi yaitu tahap untuk mengkonstruksi model pendulum pegas tergantung dengan cara substitusi sistem koordinat pendulum pegas tergantung dalam persamaan Lagrange. Merangkup kesimpulan merupakan tahap menarik kesimpulan dari semua hasil dari tahap yang telah dilakukan.

### 4. Runge-Kutta orde 4

Persamaan differensial adalah persamaan matematika yang telah digunakan dalam berbagai macam cabang ilmu pengetahuan seperti mekanika, teknik kimia, teknik sipil, ekonomi, biologi, dsb. Contohnya adalah, persamaan gerak pada sistem pendulum pegas tergantung memberikan persamaan differensial. Jika persamaan differensial tersebut adalah persamaan differensial orde 2, maka metode numerik Runge-Kutta orde 4 akan saling berkaitan. Jika,  $g' = \frac{d^2y}{dx^2}$  dan  $f' = g = \frac{dy}{dx}$ , maka solusi dari  $f$  adalah fungsi yang bergantung pada  $y, g = f'$ , or  $x$ . Solusi numerik metode Runge-Kutta orde 4 diberikan menurut persamaan:

$$f_{n+1} = f_n + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) \quad (6)$$

$$g_{n+1} = g_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

dengan

$$j_1 = hg(y, g, x) \quad (8)$$

$$k_1 = hg'(y, g, x) \quad (9)$$

$$j_2 = hg\left(y + \frac{j_1}{2}, g + \frac{k_1}{2}, x + \frac{h}{2}\right) \quad (10)$$

$$k_2 = hg'\left(y + \frac{j_1}{2}, g + \frac{k_1}{2}, x + \frac{h}{2}\right) \quad (11)$$

$$j_3 = hg\left(y + \frac{j_2}{2}, g + \frac{k_2}{2}, x + \frac{h}{2}\right) \quad (12)$$

$$k_3 = hg'\left(y + j_3, g + \frac{k_2}{2}, x + \frac{h}{2}\right) \quad (13)$$

$$j_4 = hg(y + j_3, g + k_3, x + h) \quad (14)$$

$$k_4 = hg'(y + j_3, g + k_3, x + h) \quad (15)$$

Dalam penelitian ini, penulis akan menyelesaikan sistem pendulum pegas tergantung secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Dengan menggunakan metode ini, kita dapat membuat pendekatan yang rigid untuk mendapat turunan rata-rata selama waktu tertentu. Persamaan (8) sampai (15) akan diulang secara kontinu sampai waktu maksimal yang diberikan.

## 5. Hasil dan Pembahasan

Hasil transformasi dari  $\theta_1, \theta_2$  dan  $x$  ke koordinat kartesian:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (6)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (7)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + (l_2 + x) \sin \theta_2 \quad (8)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - (l_2 + x) \cos \theta_2 \quad (9)$$

Pada koordinat kartesian,  $T$  pada sistem pendulum pegas tergantung didefinisikan menurut persamaan:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + m_2 \left\{ (l_1^2 + l_x^2) \dot{\theta}_1^2 + \dot{x}^2 + 2l_1 (l_x a \dot{\theta}_2 - b \dot{x}) \dot{\theta}_1 \right\} \right\} \quad (10)$$

dengan  $l_x = l_2 + x$ ,  $a = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ , dan  $b = \sin(\theta_1 - \theta_2)$ . Nilai  $V$  dari sistem pendulum pegas tergantung dalam koordinat kartesian didefinisikan menurut persamaan:

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2g(l_2 + x) \cos \theta_2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (11)$$

Dari persamaan energi kinetic dan energi potensial di atas, maka  $\mathcal{L}$  didefinisikan menurut persamaan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ m_1 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2) + m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_x^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{x}^2 + 2l_1 l_x a \dot{\theta}_2 - 2l_1 b \dot{x} \dot{\theta}_1) \right\} + \gamma gl_1 \cos \theta_1 + \psi \quad (12)$$

dengan  $\gamma = m_1 + m_2$  and  $\psi = -m_2gl_x \cos \theta_2 + \frac{1}{2}kx^2$ .

Persamaan gerak Euler-Lagrange dapat diperoleh dengan memasukkan persamaan Lagrangian ke dalam hubungan berikut  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ . Jadi, untuk nilai  $q$  masing-masing adalah  $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$ , dan  $q_3 = x$  persamaan gerak didefinisikan menurut persamaan:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-kx \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1 l_1 g \sin \theta_1}{m_1 l_1} \quad (13)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{0.5 kx \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_1 g \sin \theta_1 a - 2m_1 \dot{x} \dot{\theta}_2 + m_1 l_1 b \dot{\theta}_1 - m_1 g \sin \theta_2}{m_1 (l_2 + x)} \quad (14)$$

$$\ddot{x} = \frac{-kx \sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{m_1} - g \sin(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_1 + l_1 a \dot{\theta}_1^2 + (l_2 + x) \dot{\theta}_2^2 + g \cos \theta_2 - \frac{kx}{m_2} \quad (15)$$

Ketiga persamaan Euler-Lagrange ini merupakan persamaan diferensial linier orde dua.

Solusi numerik untuk sistem yang diberikan dalam persamaan (13), (14), dan (15) disajikan. Nilai-nilai tertentu dari parameter  $m_1, m_2, l_1, k$  dan  $g$  telah dipilih untuk semua grafik keluaran ( $m_1 = m_2 = 0.1 \text{ kg}, l_1 = l_2 = 1 \text{ m}, k = 1000$ , dan  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ). Kami juga mengatur kondisi awal untuk  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}, x = 0, \dot{\theta}_1 = 5, \dot{\theta}_2 = 1$ , dan  $\dot{x} = 1$ . Grafik keluaran diplotkan sebagai berikut:

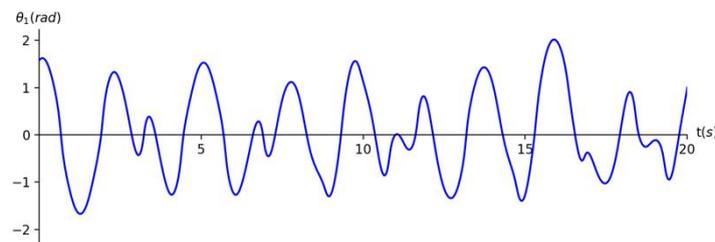


Figure 2.  $\theta_1$  vs  $t$

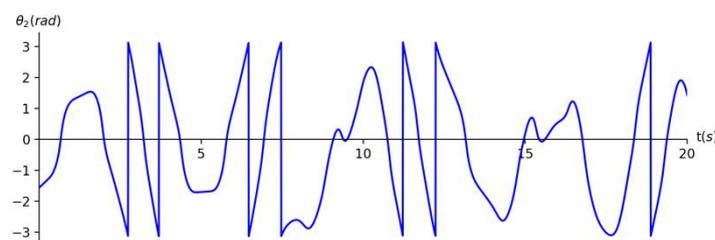
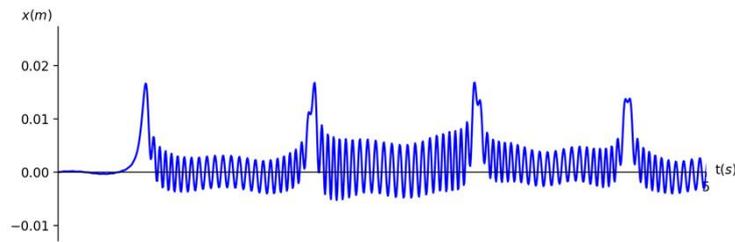
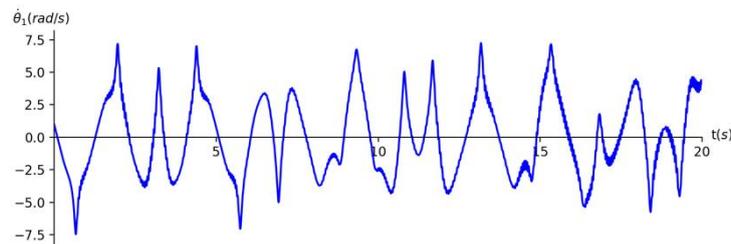
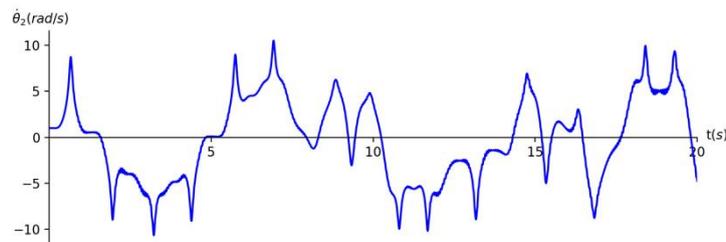
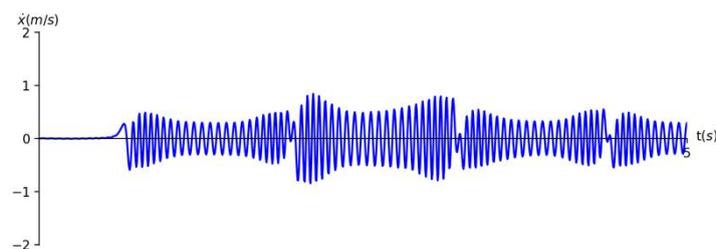
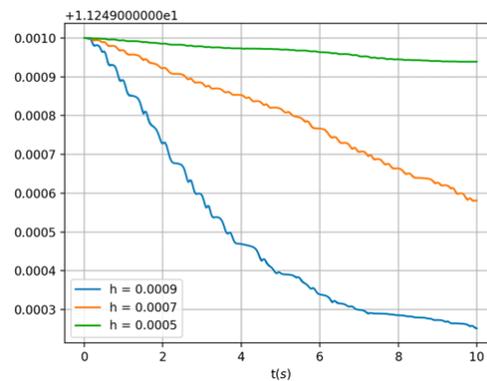


Figure 3.  $\theta_2$  vs  $t$ Figure 4.  $x$  vs  $t$ Figure 5.  $\dot{\theta}_1$  vs  $t$ Figure 6.  $\dot{\theta}_2$  vs  $t$ Figure 7.  $\dot{x}$  vs  $t$ 

Pada gambar 2 – 4 perilaku dinamis dari variasi sudut  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  dan  $x$  ditelaah diplotkan terhadap waktu. Dari gambar tersebut kedua pendulum  $m_1$  dan  $m_2$  memiliki amplitudo yang berbeda untuk setiap getaran. Dari gambar 2 – 4, diketahui bahwa frekuensi untuk setiap getaran memiliki nilai yang berbeda. Hal ini juga terjadi pada perilaku  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  dan  $\dot{x}$ , masing-masing memiliki getaran tidak periodik dengan amplitudo yang bervariasi yang mengarah ke keadaan *chaos*.



Gambar 8. Energy vs  $t$

Kemudian, kami memvalidasi solusi numerik yang telah didapat. Kami mencari beberapa batasan khusus dari input parameter yang solusi analitiknya tersedia. Dan kemudian kami menguji solusi numerik di salah satu batas ini terhadap solusi analitik yang terkait [3]. Gambar 8 menunjukkan energi versus waktu  $t$ , dihitung secara numerik untuk sistem pendulum pegas terganteng. Kami mengharapkan energi pendulum yang dinormalisasi

$$\varepsilon = 1 + \frac{v^2}{2} - \cos \theta \quad (16)$$

menjadi konstan dari gerakan. Grafik diplot untuk berbagai nilai langkah waktu  $h$ . Dapat dilihat dari gambar 8 bahwa untuk  $h=0,0009$  ada kehilangan energi yang kuat karena kesalahan pemotongan dalam skema integrasi numerik, yang akhirnya menghabiskan semua energi dari pendulum. Untuk  $h=0,0007$ , kehilangan energi palsu kurang parah, tetapi masih menyebabkan pengurangan lebih dari 50% energi pendulum. Untuk  $h=0,0005$  pengurangan energi hanya sekitar 1%. Untuk  $h$  yang lebih kecil, kita bisa mendapatkan jawaban yang valid untuk sistem.

## 6. Simpulan

Sebuah sistem yang terdiri dari dua pendulum yang digabungkan dengan pegas yang terhubung di ujung bandul pertama telah diteliti. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh tiga persamaan gerak berupa persamaan diferensial biasa menurut persamaan (13), (14), dan (15). Penguraian persamaan gerak menggunakan metode Euler-Lagrange pada penelitian ini telah memenuhi standar untuk menurunkan persamaan gerak dan telah umum digunakan oleh penelitian-penelitian sebelumnya. Pada penelitian selanjutnya, metode lain dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan gerak bandul pegas terganteng dan melihat perbandingannya dengan metode Runge-Kutta orde empat. Selanjutnya diselidiki untuk menganalisis kemungkinan gerakan *chaotic* dalam sistem fisiknya.

## Daftar Pustaka

- [1] N.O. Nenuwe. 2019. Application of Lagrange Equations to 2D Double Spring Pendulum in Generalized Coordinates. *Ruhuna Journal of Science*, 10(2), 120-134.
- [2] Atkinson, K.; Han, W.; and Stewart, D.E. (2009). Numerical solution of ordinary differential equations (1st ed.). New York: John Wiley and Sons Inc
- [3] Espindola, R., Del Vallez, G., Hernández, G., Pineda, I., Muciño, D., Diaz, P., Guijosa, S. (2019). The Double Pendulum of Variable Mass: Numerical Study for different cases. *Journal of Physics*
- [4] Fitzpatrick, R. (2006, March 209). The Chaotic Pendulum. University of Texas. Austin USA. Retrieved from <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node46.html>