Jawaban Analitik suatu Persamaan Gelombang pada Getaran Senar untuk semua Mode Resonansi

Khamidatul Khasanah[1,2], J Saefan[1], dan N. Khoiri[1]
[1]Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1, Semarang
[2]E-mail: khamidatulk.05@gmail.com

Abstrak. Fenomena getaran senar berupa persamaan differensial parsial yang bergantung pada posisi dan waktu. Jawaban persamaan differensial tersebut sangat peka pada nilai awal. Apabila nilai awal dipilih berupa fungsi yang sama dengan persamaan gelombang tersebut, ini disebut sebagai mode resonansi. Jawaban persamaan gelombang berupa deret tak hingga yang melibatkan fungsi sinusoidal. Akibat pemilihan mode resonansi, jawaban yang diperoleh tereduksi hanya menjadi satu suku saja. Oleh karena itu, variabel fisis seperti bilangan gelombang k dan frekuensi f dapat dirumuskan.

Kata kunci: Getaran Senar, PDP, Mode Resonansi.

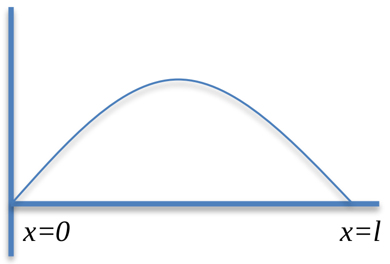
Abstract. The phenomenon of string vibrations is a partial differential equation that depends on position and time. The answer to the differential equation is very sensitive to the initial value. When the initial value is chosen to be the same condition as the wave equation, this is referred to as the resonance mode. The answer to the wave equation is an infinite series involving sinusoidal functions. Due to the selection of the resonance mode, the answer obtained was reduced to only one tribe. Therefore, physic variables such as the wave number k and frequency f can be formulated.

Keywords: string vibration, PDP, Resonant modes.

1. Pendahuluan

Ada banyak hal yang mendasari perubahan-perubahan di alam ini, yang dinyatakan dalam bentuk persamaan yang memuat laju perubahan dari suatu besar [4]. Persamaan tersebut lazim disebut sebagai persamaan differensial parsial. Beberapa fenomena fisis dalam kehidupan sehari-hari dapat dimodelkan kedalam bentuk persamaan differensial parsial, salah satunya adalah masalah gelombang. Gelombang adalah suatu gejala terjadinya penjalaran suatu gangguan melewati suatu medium, setelah gangguan lewat keadaan medium akan kembali ke keadaan semula, seperti sebelum gangguan itu datang [7].

Persamaan differensial parsial tersebut yaitu persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui. Pada Persamaan gelombang memuat turunan pertama terhadap waktu, atau turunan pertama terhadap ruang dan juga turunan kedua terhadap ruang dan waktu. Dalam kasus-kasus gelombang yang dapat dimodelkan kedalam bentuk persamaan differensial parsial dalam penerapan persamaan gelombang salah satunya adalah gelombang dawai, dengan memiliki nilai awal berupa fungsi yang menyatakan simpangan awal dan kecepatan transversal awal sesuai dengan ilustrasi berikut.



dengan, syarat batas yang berbeda yaitu *x=0* dan *x=l*. Jawaban permasalahan persamaan differensial parsial gelombang ini biasanya akan berupa deret tak hingga. Sehingga, jawaban persamaan gelombang akan dipilih nilai awal berupa fungsi sinus. Pilihan ini mengakibatkan jawaban persamaan gelombang tidak berupa deret, hanya 1 suku dari deret tersebut yang tidak bernilai nol. Berbagai penyelesaian suku ke-n yang mungkin muncul akan dianalisa hasil-hasilnya. Penulis menganggap pengambilan nilai awal berupa fungsi sinus akan mengakibatkan sebuah resonansi, oleh karena itu penulis akan meneliti untuk mendapatkan Jawaban Analitik suatu Persamaan Gelombang pada Getaran Senar untuk semua Mode Resonansi.

1.1. *Persamaan Gelombang*

Persamaan gelombang ini termasuk persamaan differensial parsial pada turunan pertama. Dalam model ini menggunakan variable-variabel berupa nilai *x* dan *t* terhadap turunan pertama. Terdapat sebuah persamaan umum gelombang satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

dengan

$$u\,(x,0) = f(x),\;\; u_t(x,0) = g(x),$$

dari persamaan tersebut terdapat sebuah kasus yang dapat diselesaikan dengan persamaan differensial parsial yakni ketika dawai gitar dipetik dengan panjang L pada kedua ujungnya berada posisi simpang nol. Sehingga, pada Persamaan (1) dapat di substitusi nilai $u\;(X,T)$ menjadi nilai

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

Sehingga solusi untuk u

$$\begin{aligned} u \quad = \quad & A \sin kx \sin kct \\ & B \sin kx \operatorname{Cos} kct \\ & \mathrm{C} \cos kx \sin kct \\ & D \cos kx \cos kct \end{aligned}$$

dengan nilai bilangan gelombang $k\,\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ di pada suku pertama dan $\frac{1}{c^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ pada suku kedua. Akibat nilai $x = 0$ dan $u = 0$ maka untuk persamaan tersebut tereduksi menjadi persamaan

$$\begin{aligned} u \quad = \quad & A \sin kx \sin kct \\ & B \sin kx \operatorname{Cos} kct \end{aligned}$$

Namun, pada sebuah kasus getaran senar pada gitar yang dipetik bahwa pada batas $x = l$ dan $u = 0$ maka, $sin\, kl = 0$ dengan besaran $k\ l\ =\ 0,\ \pi, 2\,\pi, 3\,\pi, 4\,\pi$,... maka, besar nilai $k = \frac{n\,\pi}{l}$. Persamaanya menjadi,

$$u = A \sin\frac{n\pi}{l} x\ sin\frac{n\pi c}{l} t \tag{3}$$

$$B \sin\frac{n\pi}{l} x\ cos\frac{n\pi c}{l} t \tag{4}$$

kombinasi tertentu dari solusi persamaan (3) dan (4) dapat dipecahkan masalahnya dengan mengambil nilai kondisi awlnya pada senar gitar dipetik. Maka kita doberikan bentuk senar pada $t = 0$ dan kecepatnnya pada turunan pertama $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ adalah nol pada *t=0.* Kita kemudian membuang suku yang mengandung sin $\frac{n\pi c}{l} t$ karena pada turunan waktunya tidak 0, maka dasar untuk soal ini adalah $\sin\frac{n\,\pi}{l} x \cos\frac{n\pi c}{l} t$ dan solusinya menjadi,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B \sin\frac{n\pi}{l} x \cos\frac{n\pi c}{l} t \tag{5}$$

1.2. *Resonansi*

Resonansi merupakan peristiwa ikut bergetarnya suatu sistem fisis yang diakibatkan oleh sistem fisis lain yang bergetar dengan frekuensi tertentu. Contoh dari peristiwa resonansi terutama pada bunyi adalah sebuah garpu tala yang digetarkan pada tabung. Akibat adanya garpu tala yang bergetar maka tabung akan ikut bergetar dan merapat pada pipa organa tertutup

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah telaah teoritik. Diawali dengan menyelesaikan persamaan gelombang umum $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Dari Persamaan gelombang tersebut diselesaikan dengan syarat batasnya berupa nilai awal $\sin\frac{n\,\pi}{l} x$ menghasilkan jawaban persamaan differensial secara analitik. Dengan persamaan umum differensialnya berupa

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ D(x, t, u, \frac{\partial_u}{\partial_t}, \frac{\partial_u}{\partial_x}),$$

dengan D linier dalam bentuk $\frac{\partial_u}{\partial_t}$ dan $\frac{\partial_u}{\partial_x}$.

Metode penelitian yang dilakukan menggunakan metode telaah teoririk dengan memecahkan rumus baru dari rumus umum yang sudah ada dengan menggunakan perbandingan antara rumus yang sudah dikaji dengn orang lain dan rumus baru yang dirumuskan, sebagai instrumen utama dengan hasil pemecahan yang penulis teliti. Metode telaah teoritik ini berbeda dengan studi kasus. Studi kasus lebih merujuk pada kajian rumus yang dibuat dengan merubah batas syarat dalam sebuah kasus. Metode telaah teoritik ini dilakukan karena ketertarikan peneliti terhadap fenomena yang memiliki ciri khusus yang tidak dimiliki fenomena lain.

Sehingga diperoleh jawaban umum dari persamaan gelombang yang diuraikan. Lalu, hasil yang diperoleh diinterpretasikan dalam bentuk grafik. Garfik dibuat menggunakan aplikasi perangkat lunak spider 2D dan 3D. Grafik pada spider dibuat dengan menginterpretasikan rumus

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi c}{l} t,$$

Kemudian, nilai B diperoleh dengan hasil persamaannya

$$u = \frac{l}{2} \sin \frac{n\,\pi}{l} x \cos \frac{n\,\pi\,c}{l} t,$$

Setelah mendapatkan grafik dari perubahan syarat batas-batas di telaah perubahan frekuensi f dan bilangan gelombang k.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini diperoleh jawaban analitiknya dengan batasan nilai $x = 0$ sampai dengan $x = l$,

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi c}{l} t,$$

Koefisien B, harus ditentukan sehingga pada $t = 0$ kita memiliki $f(x)$ dengan nilai fungsi $f(x) = \sin \frac{n\,\pi}{l} x$,

Jika nilai $n = 1$ maka, nilai $f(x) = \frac{\pi}{l} x$

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^1 \sin \frac{\pi}{l} x \, \sin \frac{\pi}{l} x \, dx \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin \frac{\pi}{l} x}{\frac{2\,\pi}{l}} \right]_0^l \\ &= \frac{2}{l} \left\{ \left(\frac{l}{2} - 0 \right) - (0 - 0) \right\} \\ &= \frac{l}{2} \left(\frac{2}{l} \right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Maka, semua suku untuk $n \neq 1$ akan bernilai nol, sehingga $\sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{\pi c}{l} t$.

Jika nilai $n = 2$ maka nilai $f(x) = \frac{2\pi}{l} x$

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^1 \sin \frac{2\pi}{l} x \, \sin \frac{2\pi}{l} x \, dx \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin \frac{2\,\pi}{l} x}{\frac{4\,\pi}{l}} \right]_0^l \\ &= \frac{2}{l} \left\{ \left(\frac{l}{2} - 0 \right) - (0 - 0) \right\} \\ &= \frac{l}{2} \left(\frac{2}{l} \right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Maka, semua suku untuk $n \neq 2$ akan bernilai nol, sehingga $\sin \frac{2\pi}{l} x \cos \frac{2\pi c}{l} t$.

Jika nilai $n = 3$ maka nilai $f(x)$ = $\frac{3\pi}{l}x$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\ &= \frac{2}{l}\int_0^1 \sin\frac{2\pi}{l}x\ \sin\frac{2\pi}{l}x\,dx \\ &= \frac{2}{l}\left[\frac{x}{2} - \frac{\frac{\sin 2\pi}{l}x}{\frac{4\pi}{l}}\right]_0^l \\ &= \frac{2}{l}\left\{\left(\frac{l}{2} - 0\right) - (0 - 0)\right\} \\ &= \frac{l}{2}\left(\frac{2}{l}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Maka, semua suku untuk $n \neq 3$ akan bernilai nol, sehingga $\sin\frac{3\pi}{l}x\cos\frac{3\pi c}{l}t$.

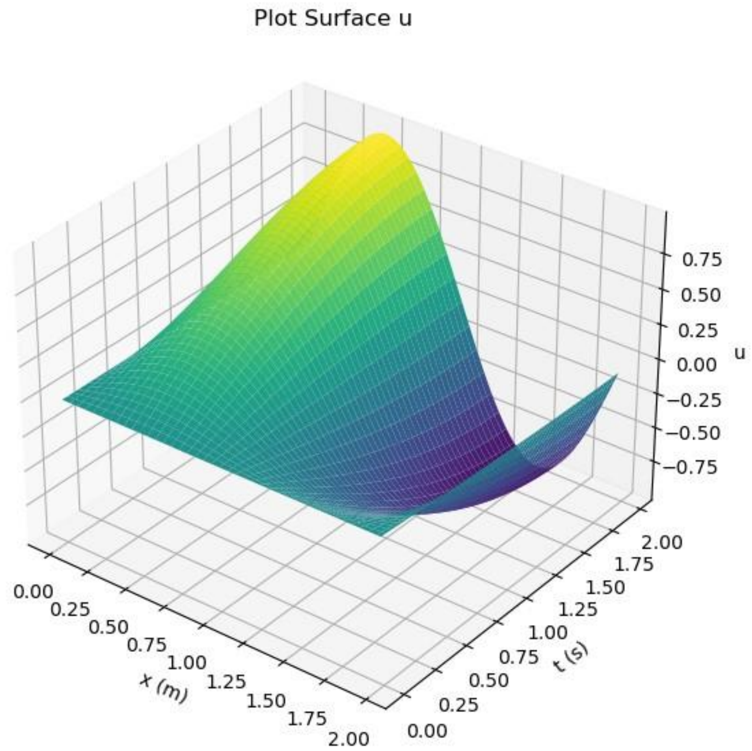
Setelah nilai B diketahui, dengan melakukan substitusi nilai ke B ke persamaan umumnya, sehingga diperoleh persamaan analitiknya,

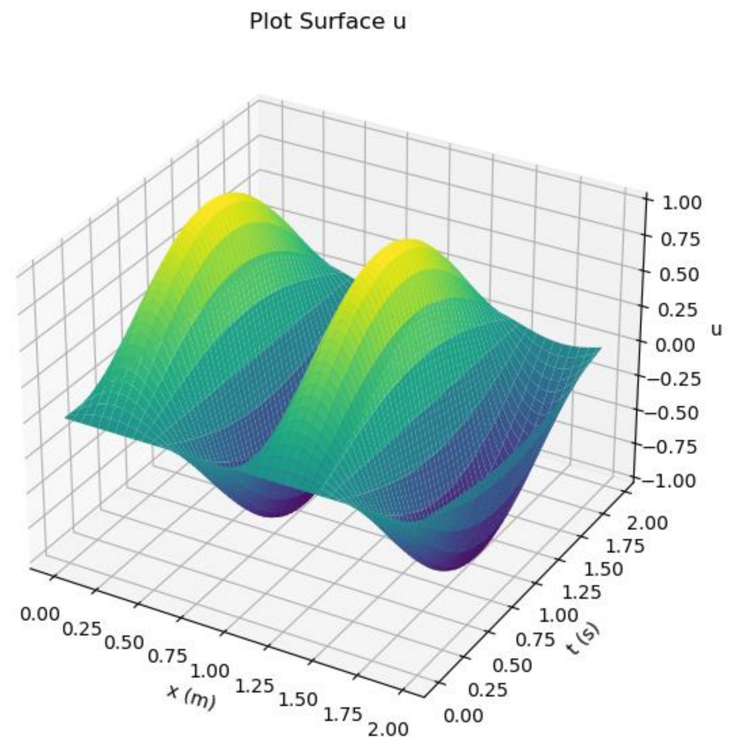
$$u = \frac{l}{2}\sin\frac{n\,\pi}{l}x\cos\frac{n\,\pi\,c}{l}t, \tag{9}$$

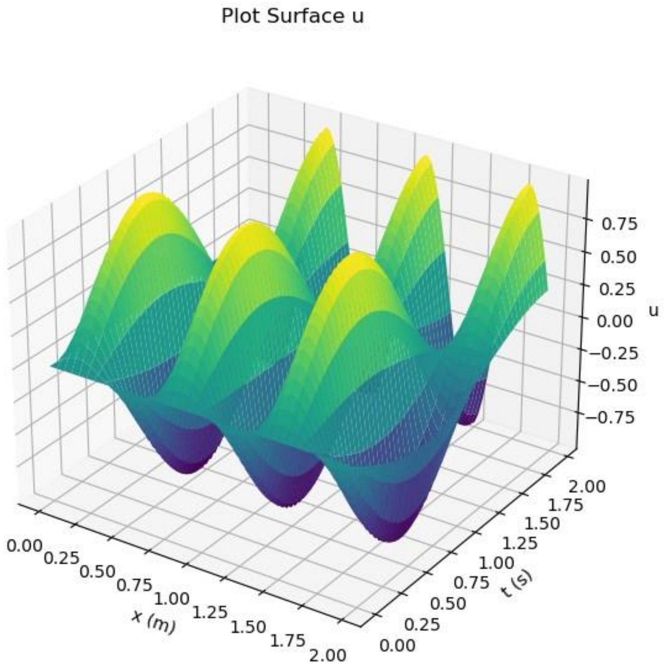
bahwa $\sin\frac{n\,\pi}{l}x$ dinyatakan sebagai bilangan gelombang k sedangkan $\cos\frac{n\,\pi\,c}{l}t$ dinyatakan untuk menghitung besar frekuensi. Dengan besar bilangan gelombang k adalah $\frac{2\,\pi}{\lambda}$ dalam menghitung grafik ketika t yang berubah, sedangkan untuk mencari nilai frekuensi dengan nilai x berubah yaitu $f = \frac{n}{t}$. Dengan nilai frekuensi yang sama atau dapat disebut dengan mode resonansi, maka persamaannya merupakan penyelesaiaan persamaan analitik dengan nilai fungsi $\sin\frac{n\,\pi}{l}x$.

Nilai u bergantung pada besar nilai $n, t,$ dan x. Karena string bergetar sedemikian rupa sehingga persamaannya hanya memiliki satu solusi. Sehingga jawabannya tidak berupa deret. Dari persamaan tersebut dapat diperoleh masing-masing program untuk nilai besar frekuensi f dan bilangan gelombang k jika nilai n, t dan x berubah.

Karena hasilnya bukan berupa deret atau terdiri hanya 1 suku saja maka keadaan tersebut mengalami mode resonansi. Pada Persamaan (9) diperoleh nilai bahwa hasil *u* bergantung pada besar nilai *n*,*t*, dan *x*. Karena string bergetar sedemikian rupa sehingga persamaan nya hanya memiliki satu solusi. Sehingga, jawabannya tidak berderet. Dari persamaan (9) diperoleh sebuah program berbentuk grafik sebagai berikut dengan mengubah nilai *n*,*t* dan *x* pada program. Perubahan tersebut karena jika nilai *n* dengan mengubah nilai *t* maka grafiknya semakin tinggi. Nilai *t* akan berjalan terus dengan *x* yang dibatasi.


Plot Surface u
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
u
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
x (m)
t (s)


Plot Surface u
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
u
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
x (m)
t (s)



4. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa dengan fungsi y = sin $\frac{n\,\pi}{l}x$ diperoleh persamaan analitiknya,

$$u = \frac{l}{2}\sin\frac{n\,\pi}{l}x\cos\frac{n\,\pi\,c}{l}t,$$

Dari persamaan tersebut dapat diselesaikan nilai bilangan gelombang k dengan nilai awal $\sin\frac{n\pi}{l}x$ dan n = 1,2,3,4,… adalah

$$k = \frac{2\,\pi(n+1)}{10}$$

Serta dapat pula menyelesaikan nilai frekuensinya dengan,

$$f\ = \frac{1}{10}\left(\frac{n}{2}\right)$$

Dan Ucapan Terima Kasih

Penulis dapat menuliskan ucapan terima kasih kepada mereka yang telah memberikan bantuan atau dukungan dari kolega, atasan, atau instansi tertentu.

Daftar Pustaka

[1] Agung Alvian Noor M S 2020 Solusi Analitik dan Numerik Suatu Persamaan Gelombang Satu Dimensi. *Jurnal Matematika UNAND* VIII 4 1-8.
[2] Chasanah A N, J M dan A E 2021 Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Dengan MEtode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 14-22.

[3] M Breger d 2014 Evidence Of Resonant Mode Coupling And The Relationship Between Low And High Frequencies In A Rapidly Rotating A Star. *The Astrophysical Journal*, 783:89.

[4] Mahdhivan A A 2020 Solusi Analitik dan Numerik Suatu Persamaan Gelombang Satu Dimensi. *Jurnal Matematika UNAND*, 1-8.

[5] Mahmudi M R 2014 *Simulasi Gelombang Sederhana Melalui Persaman sinus menggunakan matlab dengan arah penjalaran satu dimensi*.

[6] Mary L B 2006 *Mathematical Methods in the Physical Science.* India: Nutech Photolihographer.

Moh Shofi Nur Utami N R 2014 Pengaruh Frekuensi Resonansi Terhadap penurunan suhu pada sistem Termoklastik Sederhana. *Jurnal Fisika* 4 2.

[7] Nuryanto W K 2012 Rancang Bangun Alat Ukut Jarak emmanfaatkan modulasi gelombang Bunyi. *JP2F*.

[8] Praasetya D S 2014 Kajian Gelombang Satu Dimensi Berdasarkan Hasil Komputasi Numerik. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika "Lensa"* 2 2.

[9] Vig J R 2014 Temperature Insentive Dual Mode Resonant Sensors a review. *IEEE SENSORS JOURNAL*.