Analisis *Error* Pada Jawaban Numerik Metode FTCS Pada Persamaan Aliran Panas

M Rizki Mubaroq[1,2], **J Saefan dan E. Saptaningrum**[1]
[1]Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1 Semarang

[2]E-mail: rahkeid11@gmail.com

Abstrak. Perpindahan panas merupakan fenomena yang terjadi karena adanya aliran panas pada suatu sistem. Fenomena tersebut dapat dijelaskan melalui persamaan aliran panas yang merupakan persamaan diferensial parsial orde dua non linier yang cukup kompleks. Persamaan aliran panas cukup rumit diselesaikan secara analitik, tetapi dapat diselesaikan juga secara numerik. Metode numerik yang digunakan adalah metode *finite difference* dengan pendekatan FTCS (*Forward Times Center Distance*). Penyelesaian persamaan aliran panas yang dikerjakan secara numerik harus diketahui stabilitas serta akurasi dari solusi penyelesaian tersebut. Kestabilan dari hasil penyelesaian secara numerik dapat diketahui dengan menggunakan *error* global. Hasil penyelesaian yang dianalisis dengan *error* global menunjukkan bahwa semakin besar nilai k (konstanta aliran panas), maka semakin kestabilannya berkurang. Untuk setiap k, nilai akan stabil ketika $\beta \geq 2$ dan tidak stabil ketika $\beta < 2$.

Kata kunci: Aliran Panas, Metode Finite Difference, Error.

Abstract. Heat transfer is a phenomenon that occurs due to the flow of heat in a system. This phenomenon can be explained through the heat flow equation which is a fairly complex non-linear second-order partial differential equation. Heat flow equations are quite complex to solve analytically, but can be solved numerically as well. The numerical method used is the finite difference method with the FTCS (Forward Times Center Distance) approach. To solve the heat flow equation numerically, it is necessary to know the stability and accuracy of the solution. The stability of the numerical solution can be determined by using the global error. The result of the solution analyzed with global error shows that the greater the value of k (heat flow constant), the lower the stability. For each k (heat flow constant), the value will be stable when $\beta \geq 2$ and unstable when $\beta < 2$.

Keywords: Heat Flow, finite difference method, Error

1. Pendahuluan

Distribusi panas atau disebut juga perpindahan panas merupakan salah satu fenomena yang sering dijumpai dalam ilmu fisika. Fenomena tersebut terjadi karena adanya aliran panas yang muncul karena perbedaan temperatur pada suatu sistem. Menurut Lili (2020), bila terdapat dua sistem yang memiliki temperatur berbeda maka akan terjadi fenomena perpindahan energi dari sistem temperatur tinggi ke sistem yang bertemperatur rendah. Perpindahan panas dapat terjadi melalui 3 macam cara yaitu konduksi, konveksi, dan radiasi.

Perpindahan panas merupakan fenomena yang terjadi karena adanya aliran panas pada suatu sistem. Menurut Geleta (2021), aliran panas pada sistem jika sistem dalam keadaan stabil maka suhu tidak berubah terhadap waktu. Tetapi jika sistem dalam keadaan tidak stabil maka suhu dapat berubah terhadap waktu.

Penerapan aliran panas sangat sulit untuk menampilkan bagaimana aliran panas mengalir pada sebuah benda. Tetapi dengan menggunakan persamaan diferensial parsial, persamaan aliran panas dapat ditampilkan dalam bentuk grafik satu dimensi terhadap ruang - waktu (Nurullaeli, 2021). Sehingga dapat lebih mudah dalam memahami aliran panas pada benda.

Penyelesaian persamaan aliran panas dapat diselesaikan dengan cara analitik maupun numerik. Menurut Geleta (2021) pada persamaan aliran panas, penyelesaian secara analitik terdapat kekurangtepatan hasil penyelesaiannya, maka diperlukan penyelesaian secara numerik agar diketahui ketelitian dalam penyelesaian tersebut. Sehingga didapatkan hasil penyelesaian dengan ketelitian yang tepat. Metode yang digunakan untuk penyelesaian numerik adalah metode *finite diference*. Metode finite diference merupakan penerapan dari deret Taylor untuk mengetahui bentuk turunan suatu persamaan. Dalam penerapannya, deret Taylor terdiri dari 3 hampiran atau pendekatan yaitu hampiran maju (FTCS), hampiran pusat (CTCS), dan hampiran mundur (BTCS) (Nurullaeli, 2021).

Pada penyelesaian secara numerik untuk persamaan diferensial parsial sangat dibutuhkan stabilitas dan akurasi hasil jawaban untuk mengetahui ketelitian dari penyelesaian persamaan tersebut. Jika diketahui nilai analitik serta nilai numerik maka dapat diketahui nilai *error* untuk mengetahui kestabilan serta akurasi penyelesaian tersebut. Oleh sebab itu, penulis akan meneliti analisis *error* pada metode FTCS pada persamaan aliran panas.

2. Metode

2.1. *Studi Pustaka*

Studi pustaka merupakan salah satu metode yang dilakukan dalam penelitian deskriptif kualitatif. Studi pustaka adalah langkah awal untuk melakukan pengumpulan data dalam penelitian. Studi pustaka dilakukan dengan tujuan untuk memahami konsep penelitian. Dalam hal ini penulis menggunakan metode tersebut untuk memahami konsep persamaan diferensial parsial pada perpindahan panas. Selain memahami konsep, dari metode studi pustaka yang dilakukan, dapat mengetahui perkembangan untuk materi yang diteliti sehingga dapat membantu dalam menganalisis hasil penelitian. Dengan adanya metode studi pustaka, akan mempermudah untuk mendapatkan jawaban analitik dari persamaan diferensial parsial pada persamaan aliran panas. Untuk persamaan umum dari persamaan diferensial parsial pada persamaan aliran panas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial U}{\partial t} - k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

2.2. *Investigasi*

Metode penelitian yang dilakukan menggunakan metode investigasi numerik. Metode numerik yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah metode *finite difference* FTCS (Forward Time Center Space). Dalam penyelesaian secara numerik dengan metode *finite difference* FTCS menggunakan sumber dari penjabaran dari deret Taylor untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan aliran panas.

2.3. *Analisis Error*

Untuk mendapatkan kestabilan pada solusi penyelesaian persamaan panas yang dikerjakan secara numerik, dibutuhkan sebuah analisis *error*. Penulis menganalisis hasil jawaban analitik dan numerik untuk mendapatkan nilai *error* pada hasil penyelesaian aliran panas. Metode yang digunakan dalam menganalisis hasil penyelesaian tersebut adalah analisis *error* global. *Error* global adalah hasil analisis nilai *error* yang didapat dari banyak pengulangan

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Penyelesaian Analitik

Persamaan diferensial parsial pada aliran panas secara analitik pada sebuah kabel dapat diketahui kondisi awal serta kondisi batas sebagai berikut.

$$u(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l} x \; dan \; u(0,t) = 0$$

Dengan menggunakan penyelesaian persamaan diferensial parsial orde 2, hasil penyelesaian $u(x,t)$dapat dituliskan dengan

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2}$$

Dengan persamaan aliran panas

$$\frac{\partial U}{\partial t} - k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \tag{3}$$

$$X\frac{\partial T}{\partial t} - kT\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{kT}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \tag{5}$$

Diasumsikan jika $\frac{1}{kT}\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda$ dan $\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda$, maka didapatkan

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda$$

$$X(x) = \sin\sqrt{\lambda}\, x \tag{6}$$

Dan

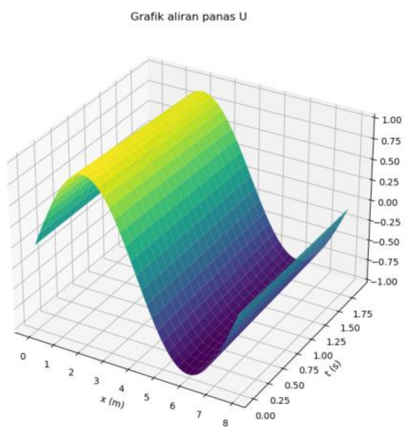
$$\frac{1}{kT}\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda$$

$$T(t) = e^{-\lambda k t} \tag{7}$$

Dengan batas $u(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x$ maka didapatkan bahwa besar $\lambda = (\frac{2\pi}{l})^2$. Maka hasil penyelesaian pada persamaan aliran panas secara analitik adalah

$$u(x,t) = \sin\frac{2\pi}{l}x e^{-(\frac{2\pi}{l})^2 kt} \tag{8}$$

Hasil penyelesaian secara analitik dapat ditampilkan dengan grafik Gambar 4.1



Gambar 4.2. *Grafik aliran panas secara analitik dengan parameter k=0.1 β=1 t=2 x=8*

3.2 Penyelesaian Numerik

Kemudian untuk penyelesaian secara numerik, persamaan aliran panas adalah dengan menyubstitusikan penjabaran Deret Taylor untuk pendekatan FTCS pada persamaan aliran panas.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{U_{j+1}^{i} + U_{j}^{i}}{\Delta t} \text{ dan } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{U_{j}^{i+1} - 2U_{j}^{i} + U_{j}^{i-1}}{\Delta x^2} \tag{9}$$

Untuk persamaan (9) disubtitusikan ke dalam persamaan aliran panas, sehingga didapatkan persamaan numerik berikut.

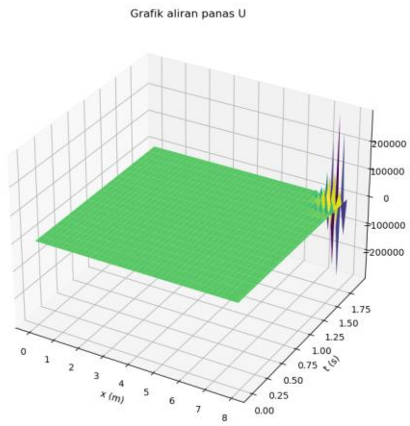
$$\frac{U_{j+1}^{i} + U_{j}^{i}}{\Delta t} = k\frac{U_{j}^{i+1} - 2U_{j}^{i} + U_{j}^{i-1}}{\Delta x^2} \tag{10}$$

$$U_{j+1}^{i} = k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{j}^{i+1} - 2U_{j}^{i} + U_{j}^{i-1}\right) - U_{j}^{i} \tag{11}$$

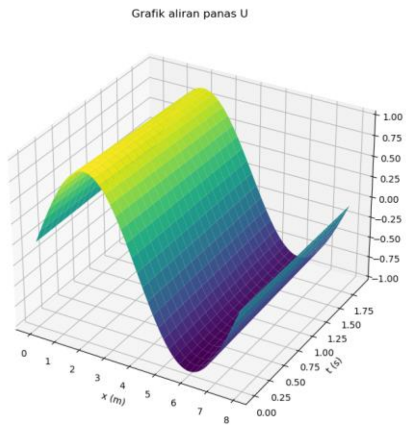
Diasumsikan bahwa $k\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \alpha$, maka hasil penyelesaian secara numerik sebagai berikut.

$$U_{j+1}^{i} = \alpha\left(U_{j}^{i+1} + U_{j}^{i-1}\right) - U_{j}^{i}(1 + 2\alpha) \tag{12}$$

Berdasarkan persamaan diatas, maka hasil penyelesaian secara numerik dapat ditampilkan dengan grafik pada Gambar 4.2



Gambar 4.2. *Grafik aliran panas secara numerik dengan parameter k=0.1 β=1 t=2 x=8*



Gambar 4.3. *Grafik aliran panas numerik dengan parameter k=0.1 β=2 t=2 x=8*

3.3 Analisis *Error*

Dengan penyelesaian secara analitik dan numerik maka akan didapatkan hasil stabilitas dari nilai *error* pada hasil penyelesaian tersebut. Dengan menggunakan *error* global maka didapatkan hasil nilai *error* sebagai berikut.

Tabel 4.1. *Nilai rata -rata error pada penyelesaian persamaan panas*

β	k=1	k=0.75	k=0.5	k=0.25	k=0.1
1	$3{,}75 \times 10^{102}$	$8{,}06 \times 10^{78}$	$2{,}07 \times 10^{56}$	$8{,}25 \times 10^{31}$	$1{,}64 \times 10^{15}$
2	0.00709	0.00685	0.00629	0.00505	0.00351
3	0.00702	0.00679	0.00629	0.00504	0.00354
4	0.00699	0.00676	0.00622	0.00504	0.00356
5	0.00698	0.00674	0.00620	0.00504	0.00357
6	0.00697	0.00673	0.00619	0.00503	0.00358
7	0.00697	0.00673	0.00620	0.00504	0.00359
8	0.00697	0.00674	0.00620	0.00504	0.00359
9	0.00698	0.00674	0.00620	0.00504	0.00360
10	0.00698	0.00674	0.00620	0.00505	0.00360

Tabel 4.2. *Nilai maksimal error pada penyelesaian persamaan panas*

β	k=1	k=0.75	k=0.5	k=0.25	k=0.1
1	$2{,}11 \times 10^{106}$	$3{,}93 \times 10^{81}$	$8{,}27 \times 10^{56}$	$2{,}34 \times 10^{35}$	$2{,}97 \times 10^{15}$
2	0.07821	0.07821	0.07821	0.07821	0.07821
3	0.07830	0.07830	0.07830	0.07830	0.07830
4	0.07834	0.07834	0.07834	0.07834	0.07834
5	0.07836	0.07836	0.07836	0.07836	0.07836
6	0.07838	0.07838	0.07838	0.07838	0.07838
7	0.07839	0.07839	0.07839	0.07839	0.07839
8	0.07840	0.07840	0.07840	0.07840	0.07840
9	0.07840	0.07840	0.07840	0.07840	0.07840
10	0.07841	0.07841	0.07841	0.07841	0.07841

4. Pembahasan

Menurut penelitian Geleta (2021), metode numerik yang digunakan lebih menguntungkan daripada metode analitik. Namun, pendekatan analitis memiliki keunggulan tersendiri. Jika Anda menambahkan banyak suku deret, pendekatan analitis lebih baik mendekati solusi.

Dari hasil nilai *error* pada tabel 4.1, dapat diketahui bahwa nilai rata-rata *error* akan berubah jika besar k (koefisien aliran panas) dan β (1/α) berubah. Semakin besar k maka nilai rata-rata *error*nya kan semakin besar juga begitu juga sebaliknya. Dan nilai *error* akan mencapai kestabilan untuk setiap k ketika nilai $\beta \geq 2$ dan tidak stabil ketika $\beta < 2$.

5. Simpulan

Analisis *error* pada hasil penyelesaian persamaan panas secara numerik adalah nilai *error* bergantung pada besar nilai k (koefisien aliran panas) dan nilai β (nilai 1/α). Semakin besar nilai k maka nilai *error* akan semakin besar juga yang artinya akurasi hasil penyelesaian aliran panas semakin tidak teliti. Untuk setiap nilai k, nilai *error* akan tidak stabil ketika nilai $\beta < 2$ dan akan stabil saat nilai $\beta \geq 2$.

Daftar Pustaka

[1] Chasanah, A. N. (2021). Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 14-22.

[2] Meyu, G. K. (2021). Analytical Solution vs. Numerical Solution of Heat Equation Flow Through Rod of Length 8 Units in One Dimension. *International Journal of Applied Mathematics and Theoretical Physics*, 53-63.

[3] Nurullaeli. (2021). MEDIA BANTU SIMULASI DISTRIBUSI PANAS PADA BATANG KONDUKTOR MENGGUNAKAN PENDEKATAN FINITE DIFFERENCE. *Seminar Nasional Riset dan Inovasi Teknologi (SEMNAS RISTEK) 2021*.

[4] Oktaviana, L. (2020). METODE BEDA HINGGA EKSPLISIT DAN IMPLISIT UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN PANAS. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 301-310.

[5] Puspawan, A. (2021). THE HEAT TRANSFER FLOW ANALYSIS OF THE JIS G 3106 SM520B STEEL PLATE CUTTING PROCESS USING CNC FLAME CUTTING MACHINE IN THE MANUFACTURE OF THE BOTTOM PLATE BOX GIRDER (CASE STUDY IN PT. BUKAKA TEKNIK UTAMA, BOGOR REGENCY, WEST JAVA PROVINCE, INDONESIA). *Rekayasa Mekanika: Mechanical Engineering Scientific Journal, Pure and Inter Disciplinary*, 5-14.

[6] Sari, H. K. (2022). PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, 139-148.

[7] Sinopa, L. C. (2020). HAMPIRAN SOLUSI PERSAMAAN PANAS DIMENSI SATU DENGAN METODE BEDA HINGGA CRANK-NICOLSON. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya*, 195-204.

[8] Sitompul, H. A. (2022). AKURASI SOLUSI NUMERIK PADA PERSAMAAN GELOMBANG BERDIMENSI-SATU. *JURNAL PENELITIAN FISIKAWAN* , 54-63.

[9] Zaki, A. (2019). Solusi Persamaan Laplace pada Koordinat Bola. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics* , 82-90.