Mekanika Pegas-Pendulum Tergandeng dalam Tinjauan Lagrangian

S Wahyuni[1,3] **E Irawati**[1,2] **dan J Saefan**[2]
[1]Fisika Universitas Negeri Semarang, Jl. Raya Sekaran-Gunungpati Semarang
[2]Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1 Semarang

[3]E-mail: wahyuni.smg@mail.unnes.ac.id
Abstrak: Ditinjau suatu sistem pegas-pendulum tergandeng dalam medan konservatif. Dicari persamaan gerak sistem dengan menggunakan metode Lagrangian dan tampilan visualisasinya. Diperoleh persamaan gerak yang diwakili oleh persamaan diferensial orde dua dari dua koordinat umum yang dipakai, yaitu pertambahan panjang pegas dan sudut simpangan bandul. Persamaan gerak yang dihasilkan ini dapat digunakan untuk mengetahui dinamika gerak sistem setiap saat. Pemahaman mahasiswa diharapkan lebih utuh dengan diberikannya penurunan persamaan gerak dan visualisasi kasus fisis ini.

Kata kunci: pegas-pendulum tergandeng, Lagrangian, visualisasi

Abstract. A coupled spring-pendulum system in a conservative field was considered where the equation of motion of the system using the Lagrangian method and its visualization were delivered. The equation of motion represented by a second-order differential equation from the two general coordinates used, namely the increase in the length of the spring and the angle of the pendulum. The resulting equation of motion can be used to determine the dynamics of the motion of the system at any time. Students' understanding is expected to be more complete by providing a procedure to get the equation of motion and visualization of this physical case.

Keywords: A coupled spring-pendulum, Lagrangian, visualization

1. Pendahuluan

Cara lain untuk melihat mekanika, selain dari perspektif Newton, yaitu menggunakan perspektif Lagrange. Perspektif ini didasarkan pada operasi matematika dengan besaran skalar energi, berbeda dengan pendekatan Newton yang didasarkan pada besaran vektor gaya dan percepatan [1]. Meskipun tampaknya berbeda, dalam beberapa hal kedua perspektif ini dapat saling menggantikan. Sebagai contoh, Ariska menyajikan dinamika pesawat Atwood dengan persamaan Euler-Lagrange sebagai alternatif persamaan Newton [2]. Hanya saja pada kasus yang lebih kompleks Lagrangian menunjukkan kelebihannya dibandingkan Newtonian, seperti kajian yang memanfaatkan metode Lagrange pada sebuah studi perbandingan dari metode utama untuk formulasi analitik dan solusi numerik dari persamaan gerak sistem benda-benda tegar [3].

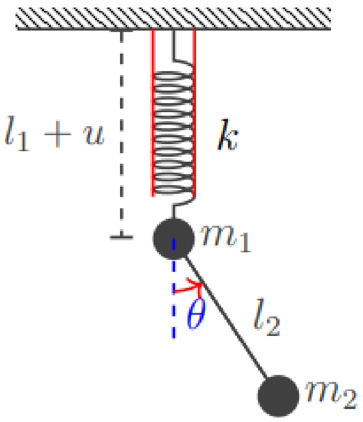
Banyak sekali kasus mekanika yang tidak sempat dijelaskan secara detail dalam kuliah karena keterbatasan waktu. Selain itu, pembahasan kasus yang kompleks membutuhkan kemampuan matematika yang tinggi pula. Padahal, penalaran tentang dunia fisika membutuhkan model yang tepat untuk mempelajari dinamika yang mendasarinya. Salah satu kasus mekanika yang menarik untuk dibahas adalah masalah yang melibatkan bandul dan pegas, sebagai contoh simulasi pergerakan sistem pendulum ganda [4] dan aspek numerik dari perilaku kinematika kasus pendulum tergandeng [5].

Lebih jauh, kasus yang banyak dibahas adalah pegas-pendulum tergandeng, yaitu sistem yang melibatkan pegas dan pendulum secara bersamaan. Awrejcewicz mengkaji gerak bidang pegas-pendulum dengan model matematis sistem ditransformasikan ke dalam bentuk kompleks tak berdimensi dan kemudian diterapkan pendekatan analitik. Pendekatan solusi analitik memberikan kemungkinan untuk menganalisis keadaan tunak dan gerakan transien sistem untuk berbagai parameter. Untuk getaran kondisi tunak, fungsi respons frekuensi diturunkan, dan semua hasil analisis sepenuhnya dikonfirmasi oleh analisis numerik [6]. Berikutnya, penyelesaian persamaan gerak Lagrange untuk pendulum pegas ganda 2D dengan pertambahan panjang pegas bergantung waktu [7] dan penyelidikan masalah pegas-pendulum teredam nonlinier dengan gerakan titik porosnya berada dalam jalur elips [8].

Meskipun sudah banyak kasus yang membahas sistem pegas-pendulum tergandeng secara kompleks, tetapi mahasiswa masih mengalami kesulitan memahami penurunan matematis, bahkan untuk kasus yang sederhana. Hal ini semakin dibatasi dengan sedikitnya jumlah pertemuan di dalam kelas. Oleh karena itu, dalam kajian ini akan diberikan langkah penurunan persamaan gerak sistem pegas-pendulum tergandeng dalam tinjauan Lagrangian.

2. Metode

Hendak ditinjau sebuah kasus fisis berupa sistem pegas-pendulum tergandeng. Sistem ini terdiri atas pegas ringan yang digantung secara vertikal, dengan bagian bawah dipasang bandul. Kemudian, bandul dikaitkan dengan sebuah tali ringan yang ujungnya juga dipasang bandul. Asumsi yang digunakan adalah pegas hanya dapat bergerak naik turun dengan cara memanjang dan memendek dalam arah vertikal. Adapun bandul dibatasi hanya dapat berayun pada dua dimensi. Secara keseluruhan sistem dapat disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Sistem pegas-pendulum

Berdasarkan gambar dan analisis sederhana dapat kita tentukan koordinat umum untuk sistem ini adalah u dan θ sehingga akan kita cari persamaan gerak sistem sebagai diferensial orde dua dari kedua variabel ini. Sesuai dengan perspektif Lagrangian, maka kasus ini akan ditinjau dengan mencari bentuk energi kinetik dan energi potensial terlebih dahulu, kemudian diselesaikan dengan persamaan Euler-Lagrange.

3. Hasil dan Pembahasan

Langkah pertama adalah menentukan bentuk energi kinetik dan energi potensial sistem. Energi kinetik diperoleh dari

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{1}$$

dengan

$$y_1 = -l_1 - u \tag{2}$$

$$x_2 = l_2 \sin\theta \tag{3}$$

$$y_2 = -u - l_2 \cos\theta \tag{4}$$

Kemudian diperoleh turunan variabel y_1 terhadap waktu diperoleh sebagai

$$\dot{y}_1 = -\dot{u} \tag{5}$$

sehingga

$$\dot{y}_1^2 = \dot{u}^2 \tag{6}$$

Persamaan (3) dan (4) juga dicari turunannya terhadap waktu, berturut-turut diperoleh sebagai:

$$\dot{x}_2 = l_2 \dot{\theta} \cos\theta \tag{7}$$

dan

$$\dot{y}_2 = -\dot{u} + l_2 \dot{\theta} \sin\theta \tag{8}$$

Berikutnya, kita arahkan untuk memenuhi persamaan (2) maka persamaan (7) dan (8) harus kita kuadratkan sehingga diperoleh

$$\dot{x}_2 = l_2^2\, \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \tag{9}$$

dan

$$\dot{y}_2^2 = \dot{u}^2 + l_2^2\, \dot{\theta}^2 \sin^2\theta - 2l_2\, \dot{\theta}\, \dot{u} \sin\theta \tag{10}$$

Persamaan (9) dan (10) dijumlahkan, sebagai berikut

$$\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{u}^2 + l_2^2\, \dot{\theta}^2 - 2l_2\, \dot{\theta}\, \dot{u} \sin\theta \tag{11}$$

Pada akhirnya akan diperoleh bentuk energi kinetik, persamaan (1), sebagai

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{u}^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \left(\dot{u}^2 + l_2^2\, \dot{\theta}^2 - 2l_2\, \dot{\theta}\, \dot{u}\, sin\, \theta\right) \tag{12}$$

$$T = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, \dot{u}^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \left(l_2^2\, \dot{\theta}^2 - 2l_2\, \dot{\theta}\, \dot{u} \sin\theta\right) \tag{13}$$

Bentuk energi potensial dapat dicari dengan asumsi potensial bernilai nol menempel pada m_1 sehingga bentuk potensial sistem pegas-pendulum ini merupakan penjumlahan suku potensial pegas dan potensial massa kedua m_2, yaitu

$$V = \frac{1}{2} k u^2 - m_2 g(u + l_2\, cos\, \theta) \tag{14}$$

Sebagaimana diketahui bahwa Lagrangian sistem diperoleh dari

$$L = T - V \tag{15}$$

maka dalam kasus ini Lagrangian kita peroleh sebagai

$$L = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, \dot{u}^2 + \frac{1}{2}\, m_2 \left(l_2^2\, \dot{\theta}^2 - 2l_2\, \dot{\theta}\, \dot{u}\, sin\, \theta\right) - \frac{1}{2} k u^2 + m_2 g(u + l_2\, cos\, \theta) \tag{16}$$

Seperti biasanya, persamaan Euler-Lagrange dinyatakan dalam koordinat umum terpilih sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{17}$$

dan

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \tag{18}$$

Perhatikan persamaan (16). Berdasarkan persamaan (17) maka diperoleh nilai

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 l_2 \dot{\theta} \dot{u} \cos\theta - m_2 g l_2 \sin\theta \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l_2^2 \dot{\theta} - m_2 l_2 \dot{u} \sin\theta \tag{20}$$

Karena θ dan u merupakan fungsi waktu, maka

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta} - m_2 l_2 \left(\dot{u}\dot{\theta}\cos\theta + \ddot{u}\sin\theta\right) \tag{21}$$

sehingga secara keseluruhan persamaan Euler-Lagrange (17) menjadi:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta} - m_2 l_2 \left(\dot{u}\dot{\theta}\, cos\,\theta + \ddot{u}\, sin\,\theta\right) + m_2 l_2 \dot{\theta}\dot{u}\, cos\,\theta + m_2 g l_2\, sin\,\theta = 0 \tag{22}$$

$$l_2 \ddot{\theta} - \dot{u}\dot{\theta}\cos\theta - \ddot{u}\sin\theta + \dot{\theta}\dot{u}\cos\theta + g\sin\theta = 0 \tag{23}$$

Akhirnya diperoleh:

$$l_2 \ddot{\theta} - \ddot{u}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \tag{24}$$

Oleh karena itu, persamaan gerak untuk θ diperoleh sebagai

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{u}\sin\theta - g\sin\theta}{l_2} \tag{25}$$

Adapun untuk menyelesaikan persamaan Euler-Lagrange dalam koordinat umum u, persamaan (18) dilakukan langkah yang sama, sebagai berikut.

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -ku + m_2 g \tag{26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1 + m_2)\dot{u} - m_2 l_2 \dot{\theta}\sin\theta \tag{27}$$

Karena θ dan u merupakan fungsi waktu, maka

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1 + m_2)\ddot{u} - m_2 l_2 (\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta) \tag{28}$$

sehingga persamaan Euler-Lagrange dalam koordinat umum u diperoleh (18) sebagai

$$(m_1 + m_2)\ddot{u} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right) + ku - m_2 g = 0 \tag{29}$$

Persamaan gerak untuk u diperoleh sebagai

$$\ddot{u} = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2\cos\theta + m_2 l_2 \ddot{\theta}\sin\theta - ku + m_2 g}{m_1 + m_2} \tag{30}$$

Perhatikan bahwa persamaan (30) mengandung suku $\ddot{\theta}$ yang tidak lain adalah persamaan (25). Kita substitusikan menjadi

$$\ddot{u} = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2\cos\theta + m_2\sin\theta\,(\ddot{u}\sin\theta - g\sin\theta) - ku + m_2 g}{m_1 + m_2} \tag{31}$$

Tampak bahwa ada besaran $\ddot{u}$ pada ruas kiri dan kanan. Oleh karena itu, Langkah selanjutnya adalah menyatukan variabel tersebut ke ruas kiri sebagai berikut:

$$(m_1 + m_2)\ddot{u} - m_2 \ddot{u}\sin^2\theta = m_2 l_2 \dot{\theta}^2\cos\theta - m_2 g\sin^2\theta - ku + m_2 g \tag{32}$$

Dengan mengingat sifat $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ maka ruas kiri persamaan (32) dapat disederhanakan menjadi

$$(m_1 + m_2\cos^2\theta)\ddot{u} = m_2 l_2 \dot{\theta}^2\cos\theta - m_2 g\sin^2\theta - ku + m_2 g \tag{33}$$

sehingga diperoleh diferensial orde dua dari variabel u dalam bentuk

$$\ddot{u} = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta - m_2 g \sin^2\theta - ku + m_2 g}{m_1 + m_2 \cos^2\theta} \tag{34}$$

Kemudian, perhatikan kembali persamaan (25). Tampak bahwa terdapat 2 bentuk diferensial orde dua dari θ dan u sehingga perlu kita sederhanakan hanya terdapat satu suku diferensial masing-masing di ruas kanan dan kiri.

$$l_2\ddot{\theta} + g\sin\theta = \ddot{u}\sin\theta \tag{35}$$

Substitusi persamaan (34) ke dalam persamaan (35) diperoleh

$$l_2\ddot{\theta} + g\sin\theta = \left(\frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta - m_2 g \sin^2\theta - ku + m_2 g}{m_1 + m_2 \cos^2\theta}\right)\sin\theta \tag{36}$$

$$l_2\ddot{\theta} + g\sin\theta = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta\sin\theta - m_2 g \sin^3\theta - ku\sin\theta + m_2 g\sin\theta}{m_1 + m_2 \cos^2\theta} \tag{37}$$

Dengan kembali mengingat sifat $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ maka ruas kanan persamaan (37) dapat disederhanakan menjadi

$$l_2\ddot{\theta} + g\sin\theta = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta\sin\theta + m_2 g \sin\theta\cos^2\theta - ku\sin\theta}{m_1 + m_2 \cos^2\theta} \tag{38}$$

$$l_2\ddot{\theta} = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta\sin\theta + m_2 g \sin\theta\cos^2\theta - ku\sin\theta - g\sin\theta\,(m_1 + m_2\cos^2\theta)}{m_1 + m_2 \cos^2\theta} \tag{39}$$

Akhirnya, didapatkan bentuk diferensial orde dua θ sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = \frac{m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta\sin\theta - ku\sin\theta - m_1 g\sin\theta}{l_2(m_1 + m_2\cos^2\theta)} \tag{40}$$

Kemudian, kita misalkan

$$a = m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta \tag{41}$$

$$b = m_2 g \sin^2\theta \tag{42}$$

$$c = m_1 + m_2 g \cos^2\theta \tag{43}$$

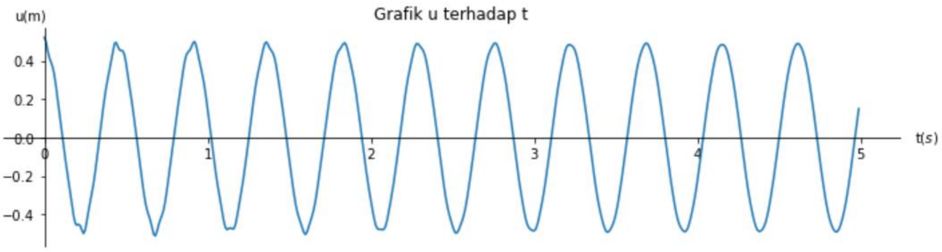
$$d = ku - a \tag{44}$$

Jika persamaan (42) sampai dengan (44) kita substitusikan ke dalam diferensial orde dua dari u dan θ, persamaan (34) dan (40), masing-masing dapat kita tuliskan dalam bentuk baru sebagai

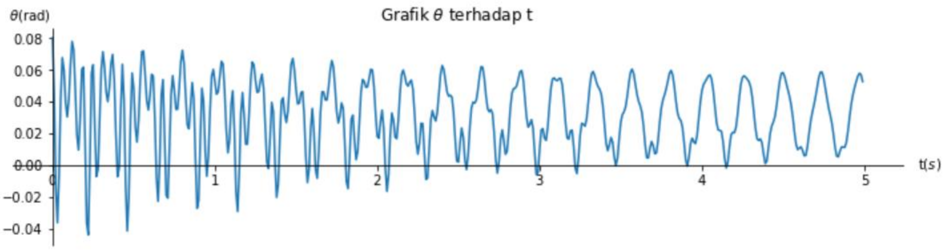
$$\ddot{u} = \frac{m_2 g - b - d}{c} \tag{45}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-(d + m_1 g)\, sin\,\theta}{l_2 c} \tag{46}$$

Setelah didapatkan bentuk diferensial orde dua dalam variabel u dan θ sebagai penyelesaian persamaan gerak kasus pegas-pendulum, akan dilihat visualisasi gerak tersebut. Dinamika u dan θ terhadap waktu dalam kasus pegas-pendulum ini disajikan pada Gambar 2 dan Gambar 3 dengan parameter $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 1$ m, $m_1 = 0.1$ m, $m_2 = 0.1$ m, $g = 9.8$ m, dan $k = 100$ N/m. Sementara nilai-nilai awal yang diberikan adalah $\theta = 30^o$, $u = 0.08$ m, $\dot{\theta} = 0$ dan $\dot{u} = 0$. Parameter dan nilai-nilai awal ini dibuat untuk kemudahan membuat grafik.



Gambar 2. Dinamika koordinat umum Simpangan pegas u terhadap waktu t



Gambar 3. Dinamika koordinat umum Simpangan ayunan θ terhadap waktu t

Hasil yang diperoleh ini menunjukkan bahwa dinamika sistem berupa gerak periodic. Simpangan pegas cenderung menunjukkan kestabilan gerak periodik yang ditunjukkan dengan amplitude simpangan yang cenderung sama dan periode getaran yang cenderung sama. Sementara, simpangan ayunan pada detik-detik awal menunjukkan ketidakstabilan. Akan tetapi, pada detik-detik berikutnya terlihat bahwa dinamika gerak menuju kearah yang stabil.

4. Simpulan

Telah dihasilkan persamaan gerak kasus pegas-pendulum dengan pendekatan Lagrangian. Analisis disajikan secara matematis dan disertakan visualisasinya untuk mempermudah mahasiswa memahami gejala fisis ini dengan lebih baik. Dinamika gerak yang dihasilkan dari sistem ini berupa gerak periodik

Daftar Pustaka

[1] Fowles G R and Cassiday G L. 2005. *Analytical Mechanics* 7th ed.
[2] Ariska M. 2019. Penyelesaian dinamika pesawat Atwood dengan persamaan Euler-Lagrange sebagai alternatif persamaan Newton pada Fisika SMA. *Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika* **6**(01) 62-69
[3] Pappalardo C M and Guida D. 2018. A comparative study of the principal methods for the analytical formulation and the numerical solution of the equations of motion of rigid multibody systems. *Archive of Applied Mechanics* **88**, 2153–2177
[4] Bayusakti M F. 2019. *Simulasi pergerakan sistem pendulum ganda.* Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Skripsi.
[5] Shanak H, Jarrar R, Khalilia H, and Asad J. 2021. Numerical Aspects of The Kinematics Behaviour of Coupled Pendulum. *Journal of Engineering Science and Technology* **16**(5) 4016 – 4026
[6] Awrejcewicz J, Starosta R, and Sypniewska-Kamińska G. 2016. Stationary and Transient Resonant Response of a Spring Pendulum. *Procedia IUTAM* **19**, 201-208.
[7] Nenuwe N O. 2019. Application of Lagrange equations to 2D double spring-pendulum in generalized coordinates. *Ruhuna Journal of Science* **10**(2)
[8] Amer T S, Bek M A, and Abohamer M K. 2019. On the motion of a harmonically excited damped spring pendulum in an elliptic path. *Mechanics Research Communications* **95**, 23-34.