Persamaan Lagrange pada Sistem Bandul Dengan Titik Tumpu Berisolasi

A, Z Nadia[1,2] **, J Saefan**[1]**, J Siswanto**[1]
[1]Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1 Semarang

[2]E-mail: anisazulfanadia2003@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model matematis dari sistem fisik menggunakan pendekatan persamaan Lagrange. Fokus utama adalah sistem bandul sederhana dengan titik tumpu yang berosilasi, yang menggabungkan gerak osilasi pegas dan bandul. Penelitian ini mencakup penurunan persamaan gerak, analisis parameter yang memengaruhi sistem, serta implementasi simulasi numerik untuk visualisasi. Hasil dari penelitian ini berupa persamaan gerak sistem, grafik analisis ruang fase, serta animasi gerak osilasi. Pendekatan ini menunjukkan potensi untuk memahami sistem dinamis kompleks melalui persamaan Lagrange, dengan implikasi dalam pengembangan model fisik dan simulasi

Kata kunci: Persamaan Lagrange, Sistem Pegas-Bandul, Simulasi Numerik.

Abstract. *This research aims to develop a mathematical model of a physical system using the Lagrange equation approach. The main focus is a simple pendulum system with an oscillating fulcrum, which combines the oscillatory motion of a spring and a pendulum. The research includes deriving the equations of motion, analyzing the parameters affecting the system, and implementing numerical simulations for visualization. The results of this research are the equations of motion of the system, phase space analysis graphs, and animation of the oscillatory motion. This approach shows the potential for understanding complex dynamic systems through Lagrange equations, with implications in the development of physical models and simulations.*

Keywords: Lagrange Equation, Spring-Bend System, Numerical Simulation.

1. Pendahuluan

Gerak osilasi adalah salah satu kajian fundamental dalam fisika yang mencakup berbagai fenomena seperti getaran pada pegas dan bandul sederhana. Meskipun kedua sistem ini telah banyak dikaji secara terpisah, penggabungan keduanya dalam satu sistem menghadirkan tantangan analisis yang menarik. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sistem bandul dengan titik tumpu yang berosilasi, mengembangkan model matematis menggunakan persamaan Lagrange, serta melakukan simulasi numerik untuk menganalisis perilaku sistem.

Bandul sederhana merupakan sistem yang banyak dipelajari karena memberikan contoh gerak harmonis sederhana yang terprediksi. Dengan adanya osilasi pada titik tumpu, sistem menjadi lebih kompleks dan memerlukan pendekatan lanjutan untuk memahami pengaruh parameter seperti panjang tali, percepatan gravitasi, dan gaya luar yang bekerja pada titik tumpu. Melalui penurunan persamaan Lagrange, penelitian ini menawarkan metode untuk mendeskripsikan dinamika sistem secara menyeluruh.

Penelitian ini juga mencakup pembuatan kode simulasi untuk mengilustrasikan grafik dan animasi gerak. Dengan menggunakan simulasi berbasis Python, analisis terhadap variabel gerak sudut dan posisi dapat dilakukan, memberikan wawasan tambahan terhadap dinamika sistem. Hasil yang diperoleh diharapkan memberikan kontribusi bagi pemahaman tentang sistem osilasi yang lebih kompleks serta aplikasinya pada sistem mekanis dan teknologi modern.

1.1. *Gerak Osilasi Pada Pegas*

Setiap gerak yang berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik atau gerak harmonik. Jika suatu partikel dalam gerak periodik bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama geraknya disebut gerak osilasi[1]. Jika sebuah sistem fisis berosilasi dibawah pengaruh gaya

$$F = -kx \tag{1}$$

dimana,

- F adalah gaya-pemulih
- k adalah konstanta-gaya
- x adalah simpangan

maka gerak benda ini adalah gerak harmonik sederhana. Salah satu sistem fisis yang mengikuti gerak harmonik sederhana adalah Pegas-Benda. Sistem pegas adalah sebuah pegas dengan konstanta pegas (k) dan diberi massa padaujungnya dan diberi simpangan sehingga membentuk gerak harmonik. Gaya yang berpengaruh pada sistem pegas adalah gaya Hooke. Sistem ini dapat dipergunakan untuk menentukan besar percepatan gravitasi bumi di suatu tempat[2].

Gerak osilasi merupakan salah satu kajian dalam fisika yang aplikasinya sangat banyak dalam kehidupan nyata. Akan tetapi gerak osilasi yang sering dikaji adalah gerak osilasi secara terpisah, misalnya gerak osilasi bandul dan gerak osilasi pegas. Pada kasus ini saya akan mengaplikasikan gerak osilasi dengan menggabungkan dua buah sistem, yaitu pegas dan bandul dalam satu sistem atau gerak osilasi pasangan antara pegas dan bandul[3]

1.2. *Ayunan Bandul Sederhana*

Satu lagi contoh sistem yang bergerak harmonis sederhana adalah sistem ayunan bandul sederhana atau sering disebut sebagai bandul matematis. Sebuah bandul adalah massa (m) yang digantungkan pada salah satu ujung tali dengan panjang l dan membuat simpangan dengan sudut kecil. Gaya yang menyebabkan bandul ke posisi kesetimbangan dinamakan gaya pemulih yaitu dan panjang busur adalah kesetimbangan gayanya. Bila amplitudo getaran tidak kecil namun tidak harmonik sederhana sehingga periode mengalami ketergantungan pada amplitudo dan dinyatakan dalam amplitudo sudut.Untuk menghasilkan ayunan sederhana atau getaran harmonis sederhana pada bandul, simpangan bandul jangan melebihi 10 derajat. Hal ini ditujukkan supaya gerakan yang terjadi disekitar titik kesetimbangan berada dalam suatu bidang datar. Oleh karena ini, salah satu ciri gerak ayunan bandul adalah berada dalam suatu bidang datar.

Gaya pemulih yang menjadikan gerak sistem ini harmonis adalah gaya gravitasi yang menuju titik kesetimbangan. Tentunya besaran lain seperti frekeunsi getar dan periode getar juga muncul dalam sistem ini. Lalu faktor apa yang mempengaruhinya? Berbeda dengan getaran pegas, massa dalam hal ini tidak mempengaruhi frekeunsi dan periode. Faktor percepatan gravitasi dan panjang tali lah yang mempengaruhi frekuensi dan periode. Ini artinya getaran pada bandul akan berbeda-beda disetiap tempat karena gravitasi dibumi sendiri bergantung pada letak lintang

2. Metode

2.1. *Metode Euler-Lagrange*

Persamaan lagangian berasal dari pengembangan hukum Newton II dan diciptakan untuk memudahkan penyelesaian masalah dalam kasus fisika yang kompleks. Untuk menyelesaikan lagrangian, pendekatan energi seperti energi kinetik dan potensial benda digunakan. Lagrangian juga menggunakan koordinat umum dan dibatasi pada penggunaan koordinat kartesian dan polar.

Persamaan Lagrange adalah selisih antara energi kinetik dan energi potensial sebuah partikel tanpa memeriksa gaya yang bekerja padanya. Energi kinetik partikel dalam koordinat kartesian adalah fungsi dari kecepatan, dan energi potensial partikel dalam medan gaya konservatif adalah fungsi dari posisi. Dengan cara ini, kita dapat mendapatkan persamaan gerak partikel yang dinyatakan oleh persamaan Lagrange.

$$\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{V} \tag{2}$$

Dimana T adalah energi kinetik dan V adalah energi potensial

2.2. *Metode Runge Kutta*

Salah satu metode numerik yang paling populer untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) adalah metode Runge-Kutta Orde 4, yang digunakan terutama untuk masalah nilai awal. Dengan meminimalkan kesalahan numerik pada setiap langkah, metode ini memperkirakan solusi persamaan diferensial tanpa memerlukan turunan tinggi yang biasanya diperlukan dalam metode deret Taylor.

Metode Runge-Kutta Orde 4 menyelesaikan PDB berdasarkan perhitungan nilai perkiraan solusi pada langkah berikutnya dengan menggunakan empat koefisien pendukung, yaitu $k_{1,}k_{2,}k_{3,}k_{4,}$ yang masing-masing dihitung sebagai berikut:

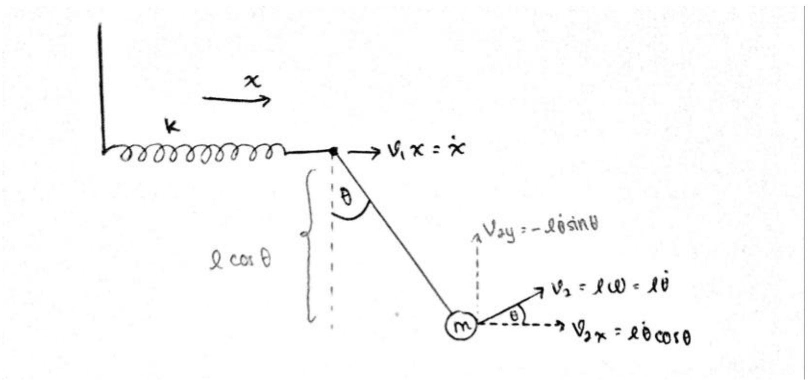
$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3}$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1 h}{2}) \tag{4}$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2 h}{2}) \tag{5}$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \tag{6}$$

Dengan memperhitungkan bobot gradien rata-rata di titik awal, tengah, dan akhir interval, Metode Runge-Kutta Orde 4 memberikan tingkat akurasi yang tinggi. Oleh karena itu, metode ini sangat baik untuk memecahkan persamaan diferensial yang sulit diselesaikan secara analitik, seperti masalah pendinginan atau dinamika benda. Karena penggunaan empat tahap evaluasi, metode ini memungkinkan akurasi tinggi dengan kesalahan yang lebih kecil daripada metode sederhana seperti metode Euler atau metode Runge-Kutta dengan orde lebih rendah.



Gambar 1. Bandul Dengan Titik Tumpu Berosilasi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. *Hasil*

3.1.1. *Penurunan Persamaan Lagrange*

Langkah pertama yaitu derajat kebebasan, yaitu :

pada pegas

1. y = c
2. z = c

pada bandul

1. z = c
2. $x^2 + y^2 = l^2$

sehingga k = 4, maka

$$d\,f = 3N - k \quad (7)$$

$$= 3(2) - 4 \quad (8)$$

$$= 2 \quad (3) \quad (9)$$

Sedangkan untuk Koordinat Umum adalah

$$ku = (x, \theta) \quad (10)$$

Setelah mendapatkan Derajat Kebebasan dan Koordinat Umum, kita mencari V pada sumbu x dan sumbu y

- **Untuk V pada sumbu X dilihat dari gambar adalah :**

$$Vx = x^{\cdot} + l\theta^{\cdot}cos\theta \quad (11)$$

$$Vx^2 = x^{\cdot 2} + l^2\theta^{\cdot}cos2\theta + 2xl\theta^{\cdot}cos\theta \quad (12)$$

- **Sedangkan untuk V pada sumbu Y adalah :**

$$Vy = -l\theta^{\cdot}sin\theta \quad (13)$$

$$Vy^2 = l^2\theta^{\cdot 2}sin^2\theta \quad (14)$$

- **Kemudian $V_x{}^2$ dan $V_y{}^2$dimasukkan dalam rumus Energi Kinetik (T) yaitu :**

$$T = \frac{1}{2}m(V_x{}^2 + V_y{}^2) \quad (15)$$

$$T = x^{\cdot 2} + l^2\theta^{\cdot}cos^2\theta + 2xl\theta^{\cdot}cos\theta + l^2\theta^{\cdot 2}sin^2\theta \quad (16)$$

Karena $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$, maka

$$T = \frac{1}{2}m(x^{\cdot 2} + 2xl\theta^{\cdot}cos\theta + l^2\theta^{\cdot 2}) \quad (17)$$

- **Selanjutnya kita menghitung Energi Potensial (V), yaitu :**

$$T = \frac{1}{2}kx^2 - mglcos\,\theta \tag{18}$$

Sehingga,

$$L = T - V \tag{19}$$

$$L = \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2xl\dot{\theta}\,cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)\right) + (\frac{1}{2}kx^2 - mglcos\,\theta) \tag{20}$$

Dari persamaan diatas, kita harus mencari persamaan $\ddot{x}\ dan\ \ddot{\theta}$

1) **Untuk persamaan $\ddot{x}$**

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}\,cos\,\theta \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ml\,(\dot{\theta}\,(-sin\theta)\dot{\theta} + cos\,\theta\ddot{\theta}) \tag{23}$$

$$= m\ddot{x} + ml\,(\ddot{\theta}cos\,\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\,) \tag{24}$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{25}$$

$$m\ddot{x} + ml\left(\ddot{\theta}cos\,\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) + kx = 0 \tag{26}$$

$$m\ddot{x} = ml\left(\ddot{\theta}cos\,\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) - kx \tag{27}$$

$$\ddot{x} = \frac{ml\left(\ddot{\theta}cos\,\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) - kx}{m} \tag{28}$$

$$\ddot{x} = l\left(\ddot{\theta}cos\,\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) - kx \tag{29}$$

2) **Untuk Persamaan $\ddot{\theta}$**

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m\dot{x}\,l\,\theta(-sin\theta) + mgl\,(-sin\theta) \tag{30}$$

$$= -sin\theta ml\,(\dot{x}\dot{\theta} + g) \tag{31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}lcos\theta + ml^2\dot{\theta} \tag{32}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml\left(\dot{x}(-sin\theta)\dot{\theta} + cos\theta\ddot{x}\right) + ml^2\ddot{\theta} \tag{33}$$

$$= ml\ (\ddot{x}\ cos\theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta)\ +\ ml^2\ddot{\theta} \quad (34)$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (35)$$

$$(ml\ (\ddot{x}\ cos\theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta)\ +\ ml^2\theta) + \ sin\theta m\ddot{l}\ (\dot{x}\dot{\theta} + g) = 0 \quad (36)$$

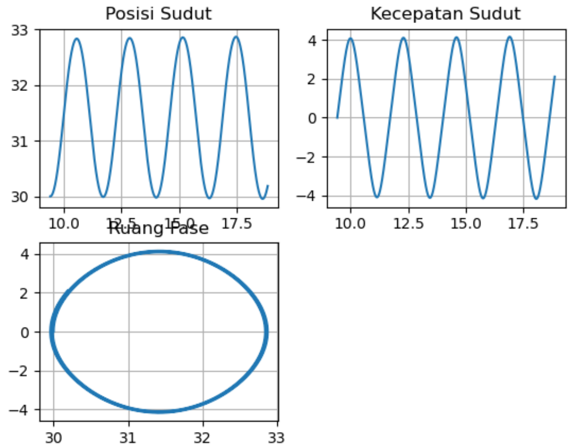
$$ml\ (\ddot{x}\ cos\theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta)\ +\ ml^2\ddot{\theta} = -sin\theta ml\ (\dot{x}\dot{\theta} + g) \quad (37)$$

$$l\ddot{\theta} +\ \ddot{x}\ cos\ddot{\theta} - \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta = -sin\theta ml\ (\dot{x}\dot{\theta} + g) \quad (38)$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}\ cos\theta = -gsin\theta \quad (39)$$

$$l\ddot{\theta} = -gsin\theta - \ddot{x}cos\theta \quad (40)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-gsin\theta - \ddot{x}cos\theta}{l} \quad (41)$$



Gambar 1. Grafik Bandul Dengan Titik Tumpu Berosilasi.

3.2. *Pembahasan*

Posisi Sudut terhadap Waktu

Grafik ini menggambarkan evolusi posisi sudut bandul sebagai fungsi waktu, mencerminkan osilasi non-linier dengan amplitudo yang ditentukan oleh simpangan sudut awal. Jika terdapat pola sinusoidal sempurna, maka osilasi mendekati harmonik sederhana. Namun, jika terdapat penyimpangan dari pola sinusoidal, ini menunjukkan keberadaan non-linearitas, misalnya dari sudut simpangan yang cukup besar atau pengaruh gaya eksternal lainnya.

3.3. *Kecepatan Sudut terhadap Waktu*

Grafik kecepatan sudut memberikan wawasan mengenai dinamika osilasi bandul pada tingkat lebih lanjut. Perubahan kecepatan sudut menunjukkan percepatan dan perlambatan osilasi akibat gaya pemulih gravitasi. Jika terdapat pola periodik dalam grafik, ini konsisten dengan gerak harmonik. Pola-pola non-harmonik, seperti asimetri atau perubahan amplitudo, dapat mengindikasikan adanya gaya tambahan atau fenomena peluruhan energi.

3.4. *Ruang Fase*

Grafik ruang fase berfungsi untuk memvisualisasikan hubungan antara posisi sudut dan kecepatan sudut bandul. Dalam kasus ideal tanpa peluruhan energi dan non-linearitas, ruang fase akan menghasilkan lintasan tertutup berbentuk elips. Sebaliknya, bentuk lintasan yang menyimpang, seperti pola spiral, menunjukkan pengaruh peluruhan energi atau dinamika yang lebih kompleks.

4. Simpulan

Penelitian ini berhasil mengintegrasikan metode analitis dan numerik untuk mempelajari sistem bandul dengan titik tumpu berosilasi. Hasil simulasi dan visualisasi memberikan wawasan baru tentang dinamika sistem ini, serta potensi aplikasinya dalam memodelkan fenomena fisik yang lebih kompleks.

Ucapan Terima Kasih

Terimakasih kepada Bapak Joko Saefan dan Bapak Joko Siswanto yang telah membantu dalam penyusunan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Elisa and Y. Claudya, “Penentuan Konstanta Pegas dengan Cara Statis dan Dinamis,” *J. Fis. Edukasi*, vol. 3, no. 1, pp. 1–57, 2016.

[2] A. Tujuan, “2 . S i s t e m O s i l a s i P e g a s,” pp. 5–9, 2008.

[3] W. Febi and E. Sustini, “Kajian Gerak Osilasi Sistem Pasangan Antara Pegas Dan Bandul,” *Semin. Nas. Jur. Fis. Fmipa Um 2015*, pp. 145–147, 2015, [Online]. Available: file:///C:/Users/user/Downloads/Fisika2015_02 Model Wilda Febri.PDF