SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA (6th SENATIK)
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPATI-UNIVERSITAS PGRI SEMARANG
Semarang, 11 Agustus 2021

ISSN 2807-324X (Online)

Model transformasi *wavelet* diskrit dengan dekomposisi nilai singular pada *wavelet haar*

Defita Rani Utami*, Dewi Retno Sari Saputro

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Indonesia

*Penulis Korespondensi: defitarani@student.uns.ac.id

Abstract. A wavelet is a transformation function that automatically cuts data into different components and studies each component with a resolution appropriate to its scale. The wavelet model is used for nonparametric data analysis, density estimation, point of change problems, and special aspects of time series. One of the wavelet models is the Haar wavelet transform model. The purpose of this research is to study the Haar wavelet model which is performed using Discrete Wavelet Transform (DWT) combined with Single Value Decomposition (SVD) to produce subsignals. Discrete Wavelet Transform (DWT) is a signal transformation that combines time and frequency. Haar wavelet transform is determined using Discrete Wavelet Transform (DWT) with discrete Fourier transform to describe the signal. In decomposing the signal into two sub-signals, it can be done with Single Value Decomposition (SVD) by using matrix calculations. The result of this research is Haar wavelet model construction with wavelet transform to determine the wavelet function using Discrete Wavelet Transform (DWT) and Single Value Decomposition (SVD).
Keywords: wavelet; wavelet Haar; DWT; SVD

1. Pendahuluan

Perkembangan teknologi dan ilmu pengetahuan yang semakin maju memberikan dampak di semua bidang termasuk matematika.Pada tahun 1910, Alfred Haar mengembangkan basis dalam membentuk suatu fungsi yang dikenal sebagai *wavelet* (Bruce, 1996). Kata *wavelet* berasal dari bahasa Perancis *ondelete* yang memiliki arti gelombang kecil. *Wavelet* yaitu suatu fungsi transformasi yang secara otomatis memotong suatu data ke dalam komponen berbeda dan mempelajari masing-masing komponen dengan resolusi yang sesuai dengan skalanya (Lestari, 2015). Model *wavelet* memiliki keuntungan yaitu secara otomatis memisahkan tren dari data dan menunjukkan komponen musiman datanya. Aplikasi analisis *wavelet* dan beberapa penelitian yang telah dilakukan dalam permasalahan statistik antara lain analisis data nonparametrik, estimasi densitas, masalah titik perubahan, dan aspek khusus *time series* terkait data stasioner dan nonstasioner. *Wavelet* awalnya populer sebagai literatur untuk analisis gelombang (Farah, 2020). Salah satu model *wavelet* adalah *wavelet* Haar.

Wavelet Haar pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Haar pada tahun 1910 (Bruce, 1996). *Wavelet* Haar merupakan sebuah transformasi matematika yang digunakan untuk menganalisis sinyal bergerak (Cao, 2020). Sinyal bergerak ini dianalisis untuk didapatkan informasi spektrum frekuensi dan waktunya secara bersamaan. Transformasi *wavelet* Haar umumnya digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan yang jangkauannya lebih luas. Model *wavelet* Haar dapat digunakan untuk meramalkan suatu data saham. Hal ini karena data saham merupakan data runtun waktu yang nonstasioner. Model

ISSN 2807-324X (Online)

wavelet mampu mendekomposisi sebuah fungsi menjadi komponen yang berosilasi sekitar nol dan terlokalisasi dalam domain waktu sehingga menjadikannya sebuah metode yang cocok digunakan dalam analisis data runtun waktu yang nonstasioner (Saputra, 2020). Salah satu metode yang dapat digunakan pada *wavelet* Haar adalah transformasi *wavelet* diskrit (DWT) dengan dekomposisi nilai singular (SVD)

DWT merupakan transformasi sinyal yang menggabungkan waktu dan frekuensi. DWT juga digunakan untuk memetakan data dari domain data asli ke domain *wavelet*. Ulfiati dan Sugiman (2015) melakukan suatu peramalan pada data saham dengan tranformasi *wavelet* Haar dan transformasi wavelet diskrit (DWT). Penggunaan DWT dapat dilakukan dengan teknik berbasis domain frekuensi yaitu SVD. SVD merupakan analisis numerik aljabar linier yang digunakan dalam banyak aplikasi dalam pengolahan citra (Sari, 2019). Metode SVD dilakukan dengan faktorisasi dan aproksimasi dalam mereduksi data terkait dengan akar pangkat dua dari nilai singular (Sulaiman, 2017). SVD berkaitan dengan nilai singular suatu matriks, nilai singular memperlihatkan karakteristik dari suatu matriks. Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik untuk mengontruksi model *wavelet* Haar dengan transformasi *wavelet* menggunakan DWT dan SVD.

2. Metode

Penelitian ini merupakan penelitian berbasis teori yaitu kontruksi Model Transformasi *Wavelet* Diskrit dengan Dekomposisi Nilai Singular Pada *Wavelet* Haar. Kontruksi model dengan transformasi *wavelet* diskrit dilakukan dengan penurunan *father wavelet* untuk menentukan koefisien pada *wavelet* Haar yang kemudian akan digunakan untuk menentukan operator dekomposisi. Menurut Sulaiman (2017), dekomposisi nilai singular dilakukan dengan memfaktorkan matriks order $m \times n$ menjadi lebih dari satu matriks untuk menentukan nilai dekomposisinya. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu mengkaji fungsi *wavelet* yaitu *father wavelet* dan *mother wavelet* serta mempelajari transformasi *wavelet* diskrit. Kemudian menentukan koefisien *wavelet* untuk digunakan dalam mencari operator dekomposisi *wavelet* Haar. Selanjutnya, hasil perhitungan operator dekomposisi *wavelet* Haar digunakan dalam perhitungan dekomposisi nilai singular untuk mengontruksi model *wavelet* Haar.

3. Hasil dan Pembahasan

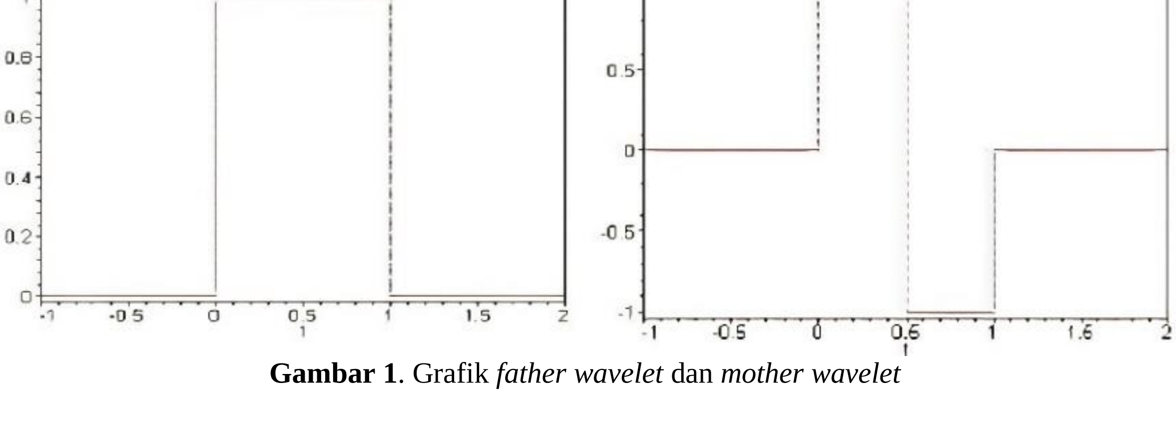
Hasil dan pembahasan terdiri atas fungsi *wavelet*, transformasi *wavelet* diskrit, penurunan *wavelet* Haar untuk menentukan koefisien *wavelet*, menentukan operator dekomposisi pada *wavelet* Haar, dan menentukan dekomposisi nilai singular untuk mengontruksi model *wavelet* Haar.

3.1. Fungsi Wavelet

Fungsi *wavelet* merupakan alat analisis yang biasa digunakan untuk menyajikan data. Fungsi *wavelet* terdiri dari dua jenis yaitu fungsi *father wavelet* (ϕ) dan *mother wavelet* (ψ) ditulis sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1 \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0. \tag{1}$$

Berikut merupakan grafik untuk fungsi *father wavelet* (ϕ) dan *mother wavelet* (ψ) yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik *father wavelet* dan *mother wavelet*

ISSN 2807-324X (Online)

3.2. Transformasi Wavelet Diskrit (DWT)

DWT merupakan transformasi yang diturunkan dari *mother wavelet* melalui translasi dan penskalaan. *Mother wavelet* menghasilkan semua fungsi *wavelet* yang digunakan dalam transformasi melalui translasi dan penskalaan, maka *mother wavelet* juga akan menentukan karakteristik dari transformasi *wavelet* yang dihasilkan (Budiman, 2013). DWT membagi sinyal menjadi dua bagian yaitu frekuensi tinggi dan frekuensi rendah. Transformasi *wavelet* terbagi menjadi dua, yaitu transformasi *wavelet* diskrit dan transformasi *wavelet* kontinu. DWT dapat digunakan dalam analisis runtun waktu. Menurut Ramadhan dan Setiyono (2019), fungsi *wavelet* diskrit ditulis sebagai

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \tag{2}$$

dengan N merupakan jumlah data, j merupakan jumlah komponen multiresolusi, dan k antara 1 sampai jumlah koefisien dalam komponen yang telah ditentukan. Koefisien $c_{j,k}$ dan $d_{j,k}$ merupakan koefisien transformasi *wavelet.*

3.3. Wavelet Haar

Wavelet Haar merupakan *wavelet* diskrit yang dapat ditentukan dengan menurunkan persamaan $\phi(t) = \sum_k h_k \sqrt{2}\, \phi(2t - k)$. Fungsi penskalaan *wavelet* Haar yang didefinisikan dengan $\phi(t) = 1(0 \leq x \leq 1)$ dan $\psi(t)$ dapat ditentukan dengan menurunkan ϕ. Dengan demikian, persamaan penskalaan $\phi(t)$ ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(2t) + \phi(2t-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t-1), \end{aligned} \tag{3}$$

dengan koefisien *wavelet* yaitu $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Selanjutnya, nilai g_0 dan g_1 dapat ditentukan menggunakan fungsi $m_0(\omega)$ dan fungsi $m_1(\omega)$. Fungsi $m_0(\omega)$ ditulis dan diuraikan sebagai

$$\begin{aligned} m_0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega 0}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega 1}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e^{-i\omega} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i\omega} \\ &= \frac{1 + e^{-i\omega}}{2}, \end{aligned} \tag{4}$$

dan fungsi $m_1(\omega)$ ditulis sebagai

$$\begin{aligned} m_1(\omega) &= -e^{-i\omega}\left(\overline{m_0(\omega+\pi)}\right) \\ &= -e^{-i\omega}\left(\overline{\frac{1 + e^{-\iota(\omega+\pi)}}{2}}\right) \\ &= -e^{-i\omega}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i(\omega+\pi)}\right) \\ &= -e^{-i\omega}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\cos(\omega+\pi) - i\sin(\omega+\pi)]\right) \\ &= -e^{-i\omega}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-\cos(\omega) - i\sin(\omega)]\right) \end{aligned}$$

ISSN 2807-324X (Online)

$$= -e^{-i\omega}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{i(\omega)}\right)$$
$$= \frac{1-e^{-i(\omega)}}{2}. \quad (5)$$

Nilai g_k dari *wavelet* Haar dapat ditentukan menggunakan transformasi Fourier dari $\omega(t)$ dan $\phi(t)$ yaitu persamaan $\Psi(\omega)$ dan $\Phi(\omega)$ ditulis sebagai

$$\Psi(\omega) = \frac{1-e^{\frac{i\omega}{2}}}{2}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\phi\left(\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{\frac{-i\omega}{2}}, \quad (6)$$

selanjutnya fungsi ψ yang diperoleh dari invers transformasi Fourier ditulis sebagai

$$\psi(\omega) = \phi(2t)-\phi(2t-1)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2t-1), \quad (7)$$

sehingga nilai g_k pada *wavelet* Haar yaitu $g_0 = -g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.4. Operator Dekomposisi Wavelet Haar

Operator dekomposisi *wavelet* Haar dapat disimbolkan dengan $(H^*a)_k$ dan $(G^*a)_k$. $(H^*a)_k$ menghasilkan koefisien $c_{j,k}$ dan $(G^*a)_k$ menghasilkan koefisien $d_{j,k}$ ditulis sebagai

$$(H^*a)_k = \sum_n h_{n-2k}a_n$$
$$= \sum_m h_m a_{m+2k}$$
$$= h_0 a_{2k} + h_1 a_{2k+1}$$
$$= \frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{\sqrt{2}} \quad (8)$$

dan

$$(G^*a)_k = \sum_n g_{n-2k}a_n$$
$$= \sum_m h_m a_{m+2k}$$
$$= g_0 a_{2k} + g_1 a_{2k+1}$$
$$= \frac{a_{2k}-a_{2k+1}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

dengan $n = a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$.

3.5. Dekomposisi Nilai Singular (SVD)

SVD merupakan analisis numerik berupa Teknik dekomposisi menggunakan matriks. Matriks SVD terdiri dari pemfaktoran tiga buah matriks yang ditulis sebagai

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{U}_{m\times m}\boldsymbol{P}_{m\times n}\boldsymbol{V}_{n\times n}$$

atau ditulis sebagai

ISSN 2807-324X (Online)

$$\boldsymbol{A} = [u_1 u_2 \dots u_k | u_{k+1} \dots u_m] \left[\begin{array}{ccccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots \\ . & . & \dots & . & 0_{kx(n-k)} \\ . & . & \dots & . & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k & \dots \\ \hline . & . & 0_{(m-k)xk} & . & 0_{(m-k)n(x-k)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v_1^T \\ v_2^T \\ . \\ . \\ v_k^T \\ \hline v_{k+1}^T \\ . \\ . \\ v_n^T \end{array}\right]$$

dengan $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$, dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ merupakan nilai *eigen* tak nol sehingga SVD dari matriks $\boldsymbol{A}$ ditulis sebagai

$$\boldsymbol{A} = [u_1 u_2 \dots u_k] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ . \\ . \\ v_k^T \end{bmatrix} \tag{10}$$

Hasil dari matriks $\boldsymbol{A}$ dengan ordo $m \times n$ apabila ruas kanan pada persamaan (10) dikalikan ditulis sebagai

$$\boldsymbol{A} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \dots + \sigma_k u_k v_k^T. \tag{11}$$

Apabila persamaan (11) disubstitusi ke dalam fungsi *wavelet* diskrit pada persamaan (2), maka kontruksi model *wavelet* Haar akan menjadi

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} (\sigma_k u_k v_k^T) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{j,k} (\sigma_k u_k v_k^T). \tag{12}$$

4. Penutup

Model *wavelet* Haar merupakan penurunan dari *father wavelet*. Dalam mengontruksi model *wavelet*, dilakukan transformasi *wavelet* diskrit dengan menentukan koefisien nya yaitu h_0, h_1, g_0, dan g_1. Selain itu, perlu menganalisis operator *wavelet* serta menghitung dekomposisi nilai singular sehingga diperoleh model sebagai berikut

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{\sqrt{2}} (\sigma_k u_k v_k^T) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{\sqrt{2}} (\sigma_k u_k v_k^T).$$

Daftar Pustaka

Baker, K. (2005). *Singular Value Decomposition Tutorial*. The Ohio State University, 24.

Bruce, A. and Gao, H.Y. (1996). *Applied Wavelet Analysis With S-PLUS With 192.* New York: NJ: Springer-Verlag.

Budiman, A. (2013). Kompresi Citra Medis Menggunakan Metode Wavelet. *Agri-tek Volume 14*, 80-87.

Cao, L., Li, H., Zhang, L., and Xu, L. (2020). Hierarchical Method For Cataract Grading Based On Retinal Images Using Improved Haar Wavelet. *Information Fusion, 53*, 196-208.

ISSN 2807-324X (Online)

Farah, S. A., Suparti, S., dan Ispriyanti, D. (2020). Analisis Multiresolusi Wavelet Dengan Transformasi Wavelet Diskrit Berbasis GUI R (Studi Kasus: Inflasi di Indonesia Pada Periode Oktober 2007-Mei 2018). *Jurnal Gaussian, 9(2)*, 143-151.

Lestari, V. N., Subanar. (2015). *Transformasi Wavelet Diskrit Untuk Data Time Series.* Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta: In Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY.

Ramadhan, M.D dan Setiyono, B. (2019). Pengolahan Citra Untuk Mengetahui Tingkat Kesegaran Ikan Menggunakan Metode Transformasi Wavelet Diskrit. *Jurnal Sains dan Seni ITS Vol.8*, No. 1, 2337-3520.

Saputra, T. I., Fauziah, F., dan Hayati, N. (2020). Implementasi Discrete Wavelet Transform Pada Aplikasi Kompresi Citra Medis. *Jurnal Infomedia: Teknik Informatika, Multimedia Jaringan, 4(2)*, 101-107.

Sari, C. A., dan Sari, W. S. S. S. (2019). *Komparasi Filter Haar Dan Filter Daubechies Dalam Wavelet Transform Berbasis Singular Value Decomposition.* Semarang: Universitas Stikubank.

Sulaiman, S., dan Agoes, S. (2017). *Analisis Reduksi Data Citra Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular.* Jakarta: Universitas Trisakti.

Subinarto, S., Susanto, E., & Indriyawati, N. (2016). *Medical Image Compression Using Hybrid Method Of Singular Value Decomposition (SVD) And Discrete Wavelet Transform (DWT) To Increase Its Efficiency Of Saving And Transmition*. *Link*, *12(2)*, 72-77.

Skodras, A. (2015). *Discrete Wavelet Transform: An Introduction.* Hellenic Open University.

Ulfiati, L., and Sugiman, S. (2015). Peramalan Data Saham Dengan Transformasi Wavelet Haar. *Unnes Journal of Mathematics 4.2*.