SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA (6th SENATIK)
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPATI-UNIVERSITAS PGRI SEMARANG
Semarang, 11 Agustus 2021

ISSN 2807-324X (Online)

Estimasi parameter *robust* holt-winters *smoothing* dengan *robustified maximum likelihood*

Alfiani Nur Fauziah*, Dewi Retno Sari Saputro

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret, Indonesia

*Penulis Korespondensi: alfiani.nfauziah@student.uns.ac.id

Abstract. Time series data is a collection of data with certain time intervals. Time series data processing models include Moving Average (MA), Autoregressive, and smoothing. Forecasting time series data with trends and seasonal popular using Holt-Winters smoothing. Holt-Winters exponential smoothing is good at predicting data patterns with simultaneous trend and seasonal effects. Holt-Winters smoothing gives weighting to the data with certain criteria. However, the Holt-Winters smoothing model is not robust for outliers. Data containing outliers affect parameters and forecasts. The method used to overcome outliers is robust. Robust Holt-Winters model with cleaned using the Huber function on outlier data weighting. Parameter estimation in the data contains popular trend and seasonality using likelihood parameter estimation. However, the likelihood estimation is not robust to the data series with outliers. Estimator τ used in the data model with outliers. Weighting is done on the data containing outliers with the ρ function. The purpose of this article is to estimate the parameters of the Holt-Winters smoothing using maximum likelihood with τ estimator. The research method is carried out by studying literature from articles, books, and journals. The results obtained are the robust Holt-Winters smoothing model with the estimated parameters robustified maximum likelihood. The robustified maximum likelihood form replaces the square of the error with τ estimator.
Keywords: outlier; robust Holt-Winters smoothing; robustified maximum likelihood; τ estimator

1. Pendahuluan

Data *time series* menyajikan kumpulan urutan pengamatan yang berorientasi pada waktu atau kronologis variabel yang diamati (Montgomery *et al.*, 2008:2). Memodelkan data *time series* dilakukan dengan memperhatikan pola data. Macam pola pada data time series yaitu horizontal, musiman, siklis, dan *trend* (Hanke & Wichern, 2014:17). Salah satu pemodelan data *time series* menggunakan *exponential smoothing* yang terdiri dari *single exponential smoothing*, *double exponential smoothing*, dan *triple exponential smoothing*. Model *exponential smoothing* menggunakan satu atau lebih parameter *smoothing*, dengan pembobotan diberikan pada data pengamatan. Model *single exponential smoothing* digunakan pada data yang memiliki pola horizontal dengan satu parameter penghalusan. *Double exponential smoothing* memodelkan data dengan pola *trend* dengan dua parameter pemulusan. *Triple exponential smoothing* memodelkan data dengan *trend* dan musiman dengan mengunakan tiga parameter *smoothing*.

Pemodelan data dengan pola *trend* dan musiman menggunakan Holt-Winters *smoothing*. Penelitian mengenai *smoothing* Holt dan Winters pertama kali dilakukan oleh Holt (1959) dan Winters (1960). Model Holt merupakan *smoothing* ganda dengan dua parameter. Model Winters merupakan

ISSN 2807-324X (Online)

perkembangan metode Holt dengan menambahkan *smoothing* terhadap data musiman Model Holt-Winters *smoothing* tidak kekar terhadap *outlier* (Gelper *et al.*, 2010) sehingga diperlukan metode untuk mengatasi *outlier* yakni model *robust* (Andrews, 1972)

Memodelkan populasi data dengan memuat *trend* dan musiman menggunakan Holt-Winters *smoothing*. Model Holt-Winters *smoothing* menggunakan konstanta dari populasi yang disebut parameter. Menurut Harini & Turmudi (2008), parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi. Parameter poulasi dapat diduga menggunakan nilai-nilai sampel. Pendugaan atau estimasi dilakukan untuk memperkirakan parameter populasi yang tidak diketahui menggunakan sampel statistik. Estimasi parameter pada model Holt-Winters *smoothing* menggunakan metode *maximum likelihood*. Menurut Gujarati (2010:131), metode dari estimasi titik dengan sifat-sifat teoritis yang lebih kuat daripada metode *ordinary least square* adalah metode *maximum likelihood*. Metode *maximum likelihood* tidak kekar terhadap *outlier* (Qin & Zhu, 2009:52) sehingga diperlukan metode untuk mengatasi *outlier*. Berdasarkan uraian tersebut, penulis mengkaji tentang model *robust* Holt-Winters *smoothing* dan adaptasi *maximum likelihood* dalam estimasi parameter model robust Holt-Winters

2. Metode

Metode penelitian yang digunakan dalam menyusun penelitian ini yakni dengan mempelajari kajian teori dari artikel, buku, dan jurnal terkait model *robust* Holt-Winters *smoothing* dan estimasi parameter dengan *likelihood*. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dengan mengkaji ulang model Holt-Winters mencakup model Holt-Winters, *robust*, dan estimasi parameter dengan *likelihood*. Kemudian mengontruksi model *robust* Holt-Winters dengan menambahkan *smoothing*. Dikarenakan ada asumsi data *outlier*, diperlukan pembobotan pada data *outlier* (*pre-cleaning*). Lalu mengontruksi model *robust* Holt-Winters *smoothing* dengan menambahkan model *pre-cleaning*. Dilanjutkan dengan mengestimasi parameter model *robust* Holt-Winters *smoothing* dengan *maximum likelihood*. Mengestimasi parameter dengan *maximum likelihood* dilakukan dengan cara menentukan distribusi peluang gabungan, kemudian menentukan fungsi *likelihood*, lalu memaksimumkan fungsi *likelihood*. Langkah selanjutnya yaitu menganalisis hasil estimasi parameter.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut diuraikan tentang model *robust* Holt-Winters *smoothing*, estimasi *maximum likelihood* pada model Holt-Winters smoothing, estimator $\hat{\tau}^2$, dan estimasi parameter *robust* Holt-Winters *smoothing* dengan *robustified likelihood*.

3.1. Model Robust Holt-Winters Smoothing

Holt-Winters *smoothing* merupakan model dengan *smoothing* pada data berpola musiman dan *trend*. Smoothing memberikan bobot pada model trend dan musiman. *Smoothing* diberikan dengan kriteria tertentu. Model Holt-Winters *smoothing* ditulis sebagai

$$\hat{y}_{t+h|t} = \tilde{y}_t + hF_t + S_{t+h-qs} \tag{1}$$

dengan y_t merupakan peramalan ke-*t*, $\tilde{y}_t$ merupakan *smoothing* data aktual, F_t merupakan model *trend*, dan S_t merupakan model musiman. Model *smoothing* data aktual, *trend*, dan musiman dituliskan sebagai

$$\tilde{y}_t = \lambda_1 y_t + (1 - \lambda_1)(\tilde{y}_{t-1} + F_{t-1}) \tag{2}$$

$$F_t = \lambda_1(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1 - \lambda_1)\, F_{t-1} \tag{3}$$

$$S_t = \lambda_1(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1 - \lambda_1)\, S_{t-s} \tag{4}$$

dengan λ merupakan parameter *smoothing*.

Model Holt-Winters sensitif terhadap *outlier* yang memengaruhi parameter pembobotan dan nilai peramalan masa akan datang. Menurut Cipra (1992:2), untuk mengatasi *outlier* digunakan estimasi M pada model *exponential smoothing*. Kemudian Gelper *et al.* (2010:5), memperkenalkan mekanisme *pre-cleaning* yang memberikan pembobotan pada outlier dengan *ψ-function*. Model *pre-cleaning* Holt-Winters *smoothing* dituliskan sebagai

ISSN 2807-324X (Online)

$$y_t^* = \psi\left(\frac{y_t - \hat{y}_{t-1}}{\hat{\sigma}_t}\right)\hat{\sigma}_t + \hat{y}_{t|t-1} \tag{5}$$

dengan y_t^* model Holt-Winters *cleaned* dari data pengamatan y_t dengan *t* waktu pengamatan *1,2, …, T,* ψ merupakan fungsi Huber, $\hat{\sigma}_t$ skala estimasi residual, dan $\hat{y}$ data peramalan.

Proses pre-*cleaning* data *outlier* menggunakan fungsi Huber *ψ-function* dengan mengganti data *outlier* dengan nilai yang mungkin. Jika nilai deviasi peramalan terlampau besar maka dikatakan *outlier*. Data amatan *outlier* digantikan dengan nilai yang bergantung pada konstanta *k*. Nilai konstanta *k* mengasumsikan model berdistribusi normal. Pada Persamaan (5), fungsi Huber ψ dituliskan

$$\psi_k(y_t) = \begin{cases} y_t, & jika\ |y_t| < k \\ \text{sign}(y_t)k, & lainnya \end{cases} \tag{6}$$

Distribusi normal diasumsikan memiliki konstanta *k* bernilai 2 dari *error* peramalan $r_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$. Jika konstanta *k* mendekati nilai tak hingga, model *robust* menggunakan model klasik (Gelper *et al*., 2010:5).

3.2. Estimasi Maximum Likelihood pada model Holt-Winters Smoothing

Fungsi kepadatan dari T variabel random disebut fungsi *likelihood*. Jika terdapat sampel random $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ dengan fungsi kepadatan $f(y;\lambda)$ maka fungsi *likelihood* dituliskan $L = f(Y_1;\lambda)$, $f(Y_2;\lambda), \dots, f(Y_t;\lambda)$. Metode maximum *likelihood* memaksimumkan persamaan terhadap parameter. Untuk mencari estimasi *maximum likelihood* model Holt-Winters *smoothing* dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

1. Menentukan fungsi distribusi peluang gabungan dari $y_1, y_2, \dots, y_T$.
   Dalam *T sample* dari data pengamatan terdapat peubah acak $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ memiliki fungsi distribusi $f(Y_1|\lambda_1), f(Y_2|\lambda_2), \dots, f(Y_T|\lambda_T)$. Fungsi distribusi gabungan dari peubah acak $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ ditulis sebagai

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_T|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{y}_t - (\lambda_1 y_t + \tilde{y}_{t-1} + F_{t-1} - \lambda_1\tilde{y}_{t-1} - \lambda_1 F_{t-1}}{\sigma}\right]^2}\right]$$

$$\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{y}_t - (\lambda_1 y_t + \tilde{y}_{t-1} + F_{t-1} - \lambda_1\tilde{y}_{t-1} - \lambda_1 F_{t-1}}{\sigma}\right]^2}\right] \cdots \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{y}_t - (\lambda_1 y_t + \tilde{y}_{t-1} + F_{t-1} - \lambda_1\tilde{y}_{t-1} - \lambda_1 F_{t-1}}{\sigma}\right]^2}\right]$$

$$= \prod_{t=1}^{T}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\tilde{y}_t - (\lambda_1 y_t + \tilde{y}_{t-1} + F_{t-1} - \lambda_1\tilde{y}_{t-1} - \lambda_1 F_{t-1}}{\sigma}\right]^2}\right] \tag{7}$$

2. Menentukan fungsi *likelihood.*
   Berdasarkan Persamaan (7), fungsi *likelihood* dari gabungan peubah acak $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ ditulis sebagai

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T) = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\tilde{y}_t - (\lambda_1 y_t + \tilde{y}_{t-1} + F_{t-1} - \lambda_1\tilde{y}_{t-1} - \lambda_1 F_{t-1}}{\sigma}\right]^2}\right] \tag{8}$$

3. Memaksimumkan fungsi *likelihood*.
   Berdasarkan Persamaan (8) $\ln L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$ ditulis sebagai

   $\ln L = \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T) =$

ISSN 2807-324X (Online)

$$-\frac{T}{2}\ln(2\pi) - n\ln\sigma - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{\tilde{y}_t-(\lambda_1 y_t+\tilde{y}_{t-1}+F_{t-1}-\lambda_1\tilde{y}_{t-1}-\lambda_1 F_{t-1}}{\sigma}\right]^2.$$

Proses memaksimumkan fungsi *likelihood* diuraikan sebagai berikut

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(\tilde{y}_t - \lambda_1 y_t - \tilde{y}_{t-1} - F_{t-1} + \lambda_1\tilde{y}_{t-1} + \lambda_1 F_{t-1}) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{T}\tilde{y}_t - \lambda_1\sum_{t=1}^{T}y_t - \sum_{t=1}^{T}\tilde{y}_{t-1} - \sum_{t=1}^{T}F_{t-1} + \lambda_1\sum_{t=1}^{T}\tilde{y}_{t-1} + \lambda_1\sum_{t=1}^{T}F_{t-1} = 0 \quad (9)$$

3.3. Estimator $\hat{\tau}^2$

Estimasi parameter dengan *maximum likelihood* menggunakan kuadrat *error* ($\hat{\sigma}$) sebagai estimator. Estimator $\hat{\sigma}$ tidak kekar terhadap *outlier* sehingga menggunakan estimator $\hat{\tau}$ yang kekar terhadap *outlier*. Pendekatan dengan estimator $\hat{\tau}$ menggunakan fungsi *biweight* ρ dan *error* peramalan. Data pengamatan $y_1, y_2, \dots, y_T$ memiliki eror peramalan $r_t = y_t - \tilde{y}_{t|t-1}$. Estimator $\hat{\tau}$ ditulis sebagai

$$\hat{\tau}^2 = \frac{s_T^2}{T}\sum_{t=1}^{T}\rho\left(\frac{r_t}{s_t}\right)$$

dengan $s_T = 1{,}428\ med\ |r_t|$. Fungsi *biweight* menjadikan τ^2 kekar terhadap *outlier*. Menurut Maronna *et al.* (2006:26), fungsi *biweight* dituliskan sebagai

$$\rho(y_t) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \left(\frac{y_t}{k}\right)^2\right]^3 & , jika\ |y_t| \le k \\ 1 & , lainnya \end{cases}$$

dengan *k* merupakan konstanta *tuning* untuk fungsi ρ yaitu *k=4,685*.

3.4. Estimasi Parameter Robust Holt-Winters Smoothing dengan Robustified Likelihood

Estimasi parameter maximum *likelihood* dengan kuadrat *error* untuk Holt-Winters tidak kekar terhadap *outlier* sehingga diperlukan adaptasi dari *maximum likelihood*. Adaptasi *maximum likelihood* terhadap outlier dengan mengganti estimator $\hat{\sigma}$ dengan $\hat{\tau}$ yang disebut *robustified likelihood*. Menurut Crevits & Croux (2016:9) estimator $\hat{\tau}$ memiliki *breakdown point* 50% yang merupakan batas maksimal *breakdown point* suatu estimator dapat digunakan. Berdasarkan Persamaan (9), diperoleh bentuk *robust likelihood* (*roblik*) ditulis sebagai

$$roblik(\lambda) = -\frac{T}{2}\log(\tau^2) \quad (10)$$

Estimasi parameter *robust* Holt-Winters *smoothing* dengan memaksimalkan fungsi *likelihood*. Estimasi parameter model *robust* Holt-Winters *smoothing* ditulis sebagai

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmax} roblik\ (\lambda) \quad (11)$$

4. Penutup

Model Holt-Winters *smoothing* merupakan salah satu pengolahan data *time series* pada data *trend* dan musiman. Holt-Winters smoothing tidak kekar terhadap *outlier* sehingga diperlukan metode *robust* untuk mengatasi *outlier*. Selain itu, *outlier* memengaruhi parameter sehingga diperlukan estimator yang kekar terhadap *outlier*. Estimasi parameter pada model *robust* Holt-Winters *smoothing* dengan metode *maximum likelihood* menggunakan kuadrat *error*. Metode *maximum likelihood* menggunakan kuadrat *error* tidak kekar terhadap *outlier* sehingga diperlukan estimator yang kekar terhadap *outlier*.

ISSN 2807-324X (Online)

Robustified likelihood merupakan bentuk penyesuaian estimasi parameter pada Holt-Winters dengan muatan data *outlier*. Bentuk penyesuaian dengan mengganti kuadrat *error* dengan estimator $\hat{\tau}$. Estimasi parameter model *robust* Holt-Winters *smoothing* dengan *robustified likelihood* diperoleh dari Persamaan (11).

Daftar Pustaka

Andrews, D. F. (1972). Plots of High-Dimensional Data. *Biometrics*, *28*(1), 125–136.

Aulia, R., Fajriah, H., & Salam, N. (2011). Estimasi Parameter pada Distribusi Eksponensial. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, 5(2), 40-52.

Bertsimas, D., & Nohadani, O. (2019). Robust Maximum Likelihood Estimation. *INFORMS Journal on Computing*, 31(3), 445-458.

Cipra, T. (1992). Robust Exponential Smoothing. *Journal of Forecasting*, *11*, 57–69.

Crevits, R., & Croux, C. (2016). *Forecasting with Robust Exponential Smoothing with Damped Trend and Seasonal Components*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.11791.18080

Gelper, S. E. C., Fried, R., & Croux, C. (2010). Robust Forecasting with Exponential and Holt-Winters Smoothing. *Journal of Forecasting*, *29*(3), 285–300. https://doi.org/10.1002/for.1125

Gujarati, D. (2010). *Dasar-Dasar Ekonometrika*. Penerbit Salemba Empat.

Hanke, J. E., & Wichern, D. (2014). *Business Forecasting* (9th ed.). Pearson Education Limited.

Harini, & Turmudi. (2008). *Metode Statistika*. UIN-Malang Press.

Makhdoom, I., & Nasiri, P. (2016). Maximum Likehood Estimation of Exponential Distribution Under Type-II Censoring from Imprecise Data. *Journal of Fundamental and Applied Sciences*, 8(2S), 697-714.

Maronna, R. A., Martin, R. D., & Yohai, V. J. (2006). *Robust Statistics Theory and Methods*. John Wiley & Sons, Ltd.

Montgomery, D. C., Jennings, C. L., & Kulahci, M. (2008). *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*. John Wiley & Sons, Inc.

Qin, G. Y., & Zhu, Z. Y. (2009). Robustified Maximum Likelihood Estimation in Generalized Partial Linear Mixed Model for Longitudinal Data. *Biometrics*, *65*, 52–59. https://doi.org/10.1111/j.1541-0420.2008.01050.x

Tsou, T., & Royall, R. (1995). Robust Likelihoods. *Journal of the American Statistical Association*, 90(429), 316-320.

Wangxue, C., Yi. T., & Minyu, X. (2107). Maximum Likelihood Estimator of the Parameter for a Continous One-Parameter Exponential Family Under the Optimal Ranked Set Sampling. J*ournal of Systems Science and Complexity,* 30, 1350-1363.

Yohai, V., & Zamar, R. (1988). High Breakdown-Point Estimates of Regressions by Means of the Minimization of an Efficient Scale. *Journal of the American Statistical Association*, 83(402), 406-413.