SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA (7th SENATIK)
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPATI-UNIVERSITAS PGRI SEMARANG
Semarang, 26 November 2022

ISSN: 2807-324X

Sifat-sifat Anti Subgrup Fuzzy

Cendikia Hira*, Saman Abdurrahman, Thresye

Program Studi Matematika Fakultas MIPA Universitas Lambung Mangkurat

*Penulis Korespondensi: cendihir@gmail.com

Abstract. Subgroup is not empty set of group. The group itself is a topic of discussion in abstract algebra which is one of its fundamental parts. In this paper, there further research of group and fuzzy set that produce fuzzy subgroup and anti fuzzy subgroup.
Keywords: group; subgroup; anti fuzzy subgroup.

1. Pendahuluan

Di dalam Matematika terdapat bidang struktur aljabar yang dimana salah satu kajian dasarnya adalah sebuah grup. Subgrup adalah himpunan tak kosong daripada Grup. Himpunan fuzzy adalah salah satu cabang juga di dalam aljabar. Perpaduan antara grup dan himpunan fuzzy akan menghasilkan salah satunya subgrup fuzzy. Sifat-sifat perpaduan itulah yang akan difokuskan dalam tulisan ini.

Himpunan fuzzy diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Selanjutnya, dilakukan penelitian lebih jauh oleh Rosenfield (1971) mengenai subgrup fuzzy. Lebih jauh P. Das (1981) meneliti tentang level subgrup dan R. Biswas (1990) memperkenalkan konsep dari anti subgrup fuzzy yaitu kajian lanjutan untuk perpaduan antara subgrup dan himpunan fuzzy. Himpunan fuzzy terus berkembang tidak hanya di grup. Namun, bisa juga ke himpunan lain seperti anti fuzzy subsemiring yang dikenalkan oleh Saravanan & sivakumar (2011) dan ideal fuzzy Near-Ring oleh Abdurrahman (2012). Lalu, Abdurrahman (2020) meneliti lebih jauh tentang karakteristik subsemiring fuzzy dan juga Abdurrahman (2022) mengkaji lebih lanjut tentang anti subsemiring fuzzy Di dalam tulisan ini, penulis berharap untuk dapat mengkaji lebih lanjut pembahasan dari anti subgrup fuzzy dengan menginduksi sifat dari anti subsemiring fuzzy yang di perkenalkan Abdurrahman (2022) dengan mengganti subsemiring menjadi subgrup.

Selanjutnya, diberikan beberapa definisi dan teorema dari Biswas (1990), Walker (1998) dan Ford (2020) untuk menjadi landasan pembahasan sifat dari anti subgrup fuzzy.
Berikut diberikan definisi dan sifat dari himpunan, relasi, dan fungsi.

Definisi 1 (Walker, 1998)
Misalkan S dan T adalah himpunan.
(i). $S \cup T = \{x : x \in S \text{ atau } x \in T\}$ *ini adalah gabungan dari* S *dan* T.
(ii). $S \cap T = \{x : x \in S \text{ dan } x \in T\}$ *ini adalah irisan dari* S *dan* T.
(iii).$S \setminus T = \{x : x \in S \text{ dan } x \notin T\}$ *ini adalah selisih dari* S *minus* T, *atau komplemen dari* T *dalam* S. *Notasi* T *dalam* S *bisa juga dinotasikan dengan* $T^c = S - T$.

Di dalam himpunan juga terdapat sifat berikut untuk mendukung pembahasan.

Proposisi 2 (Walker, 1998)
Misalkan S dan T adalah himpunan dan $T \subset S$ maka $(T^c)^c = T$.

ISSN: 2807-324X

Definisi 3 (Walker, 1998)
Misalkan A dan B adalah suatu himpunan. Maka
$$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$$
adalah produk katersian atau sederhananya hasil kali silang dari A dan B.
Catatan untuk subset di dalam A × B disebut relasi di dalam A × B dan subset dari A × A disebut relasi pada A.

Definisi 4 (Walker, 1998)
Sebuah pemetaan terdiri dari sebuah himpunan A, himpunan B dan subset f dari $A \times B$ sedemikian sehingga
(i) . jika $a \in A$, maka terdapat sebuah elemen $b \in B$ sedemikian sehingga $(a,b) \in f$, dan
(ii). jika $(a,b) \in f$ dan $(a,c) \in f$, maka $b = c$.

Grup merupakan suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma seperti berikut.

Definisi 5 (Walker, 1998)
Sebuah grup adalah himpunan G dan operasi biner $*: G \times G \to G$ pada G sedemikian sedemikian sehingga
(i). $(g * h) * k = g * (h * k)$ untuk semua $g, h, k \in G$;
(ii). terdapat sebuah elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $e * g = g * e = g$ untuk semua $g \in G$; dan
(iii). untuk $g \in G$, ada sebuah $h \in G$ sedemikian sehingga $g * h = h * g = e$.

Berikut diberikan beberapa sifat dari grup untuk mendukung pembahasan.

Proposisi 6 (Ford, 2020)
Diberikan G grup dan $x \in G$ maka $(x^{-1})^{-1} = x$.

Teorema 7 (Walker, 1998)
Misalkan G adalah grup, dan misalkan S subset tidak kosong daripada G. Maka S adalah subgrup daripada G jika dan hanya jika untuk $s, t \in S, st \in S$ dan $s^{-1} \in S$.

Himpunan fuzzy merupakan suatu fungsi yang memetakan himpunan tak kosong ke rentang nilai 0 sampai 1. Berikut diberikan beberapa definisi dan sifat dari himpunan fuzzy untuk mendukung pembahasan.

Definisi 8 (Biswas, 1990)
Jika S adalah sebarang himpunan, maka pemetaan $\mu : S \to [0,1]$ Disebut subset fuzzy dari S.

Definisi 9 (Biswas, 1990)
Diberikan μ adalah subset fuzzy dari S. Maka untuk $t \in [0,1]$, level subset dari himpunan fuzzy μ adalah himpunan
$$\mu_t = \{x \in S : \mu(x) \geq t\}$$

Definisi 10 (Biswas, 1990)
Diberikan G adalah grup. Sebuah subset fuzzy μ dari G disebut subgrup fuzzy dari G jika untuk setiap $x, y \in G$
(i). $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$
(ii). $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

ISSN: 2807-324X

Proposisi 11 (Biswas, 1990)
Jika μ adalah subgrup fuzzy dari sebuah grup G, maka untuk setiap $x \in G$:
(i). $\mu(e) \geq \mu(x)$,
(ii). $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Definisi 12 (Biswas, 1990)
Jika μ adalah subset fuzzy dari S maka komplemen dari μ dinotasikan μ^c, adalah himpunan fuzzy dari S diberikan dengan
$$\mu^c(x) = 1 - \mu(x)\ \forall x \in S$$
Definisi 13 (Biswas, 1990)
Diberikan G adalah grup. Sebuah subset fuzzy μ dari G disebut anti subgrup fuzzy dari G jika untuk setiap $x, y \in G$
(i). $\mu(xy) \leq \max\{\mu(x),\ \mu(y)\}$
(ii). $\mu(x^{-1}) \leq \mu(x)$

2. Metode
Untuk menguak sifat-sifat dari anti subgrup fuzzy lebih jauh, maka dilakukan induksi dari sifat-sifat dari anti subsemiring fuzzy (Abdurrahman, 2022) berutujuan untuk menguatkan sifat-sifat tersebut. Di mana dalam pembahasan pada tulisan ini subsemiring digantikan dengan subgrup dan dilakukan berdasarkan penelitian (Zadeh, 1965; Rosenfield, 1971; P. Das, 1981; Saravanan & Sivakumar, 2011). Maka di tulisan ini akan dilakukan pembahasan sifatnya berdasarkan anti subgrup fuzzy.

3. Hasil dan Pembahasan
3.1 Sifat Anti Subgrup Fuzzy
Proposisi 3.1.1
Jika μ adalah anti subgrup fuzzy dari sebuah grup G, maka untuk setiap $x \in G$:
(i) $\mu(e) \leq \mu(x)$,
(ii) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.
Bukti:
(i) Diketahui μ adalah anti subgrup fuzzy dari sebuah grup G, akan dibuktikan untuk setiap $x \in G$ berlaku $\mu(e) \leq \mu(x)$
Diambil sebarang $x \in G$, karena G grup maka setiap anggota memiliki invers maka ada $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga
$$e = xx^{-1}$$
untuk $e \in G$ Karena μ anti subgrup fuzzy merupakan juga suatu fungsi maka
$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \leq \max(\mu(x), \mu(x^{-1}))$$
Berdasarkan Definisi 13 (ii) mengakibatkan
$$\mu(e) \leq \mu(x)$$
(ii) Diketahui μ adalah anti subgrup fuzzy dari sebuah grup G, akan dibuktikan untuk setiap $x \in G$ berlaku $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$
Diambil sebarang $x \in G$. Karena μ anti subgrup fuzzy sehingga berlaku
$$\mu(x^{-1}) \leq \mu(x)$$
Karena G adalah grup maka berdasarkan Proposisi 6 maka untuk $x \in G$ berlaku $x = (x^{-1})^{-1}$ dan karena μ adalah anti subgrup fuzzy maka
$$\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \leq \mu(x^{-1}) \leq \mu(x)$$
Akibatnya
$$\mu(x^{-1}) = \mu(x)$$
Jadi, Proposisi terbukti. ■

ISSN: 2807-324X

Teorema 3.1.2
Jika μ adalah subgrup fuzzy dari sebuah grup G, maka μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G
Bukti:
Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari G. Akan dibuktikan μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G
Diambil sebarang $x, y \in G$. Dikarenakan μ adalah subgrup fuzzy maka berlaku $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ dan $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ Karena $\mu^c(xy) = 1 - \mu(xy)$ dan berdasarkan Definisi 10 (i) diperoleh

$$\begin{aligned}\mu^c(xy) = 1 - \mu(xy) &\leq 1 - \min\{\mu(x), \mu(y)\} \\ &= \max\{(1 - \mu(x)), (1 - \mu(y))\} \\ &= \max\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}&\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \mu^c(x^{-1}) \geq 1 - \mu^c(x)\end{aligned}$$

Dikarenakan μ subgrup fuzzy maka

$$\Leftrightarrow \mu^c(x^{-1}) \leq \mu^c(x)$$

Jadi, μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G. ■

Teorema 3.1.3
Jika μ adalah anti subgrup fuzzy dari sebuah grup G, maka μ^c adalah subgrup fuzzy dari G
Bukti:
Misalkan μ adalah anti subgrup fuzzy dari G. Akan dibuktikan μ^c adalah subgrup fuzzy dari G
Diambil sebarang $x, y \in G$. Dikarenakan μ adalah anti subgrup fuzzy maka berlaku $\mu(xy) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$ dan $\mu(x^{-1}) \leq \mu(x)$ Karena $\mu^c(xy) = 1 - \mu(xy)$ dan berdasarkan Definisi 13 (i) diperoleh

$$\begin{aligned}\mu^c(xy) = 1 - \mu(xy) &\geq 1 - \max\{\mu(x), \mu(y)\} \\ &= \min\{(1 - \mu(x)), (1 - \mu(y))\} \\ &= \min\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}&\mu(x^{-1}) \leq \mu(x) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \mu^c(x^{-1}) \leq 1 - \mu^c(x) \\ \Leftrightarrow\ &\mu^c(x^{-1}) \geq \mu^c(x)\end{aligned}$$

Jadi, μ^c adalah subgrup fuzzy dari G. ■

Akibat 3.1.4
Misalkan μ adalah subgrup fuzzy dari grup G jika hanya jika komplemennya μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G.
Bukti:
(⇒)
Diketahui μ adalah subgrup fuzzy dari grup G. Akan dibuktikan komplemennya μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G.
Berdasarkan Teorema 3.1.2 maka μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G.
(⇐)
Diketahui μ^c adalah komplemen dari μ dimana μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G. Akan dibuktikan μ adalah subgrup fuzzy dari grup G.
Berdasarkan Proposisi 2 karena μ^c adalah subset fuzzy maka komplemennya adalah $\mu(x) = 1 - \mu^c(x)$ untuk setiap $x \in G$. Berdasarkan teorema 3.1.3 maka μ adalah subgrup fuzzy dari G. ■

ISSN: 2807-324X

Teorema 3.1.5
Jika μ^c adalah subgrup fuzzy dari sebuah grup G, maka $(\mu^c)^c$ adalah anti subgrup fuzzy dari G.
Bukti:
Diketahui μ^c adalah subgrup fuzzy dari grup G akan dibuktikan $(\mu^c)^c$ adalah anti subgrup fuzzy dari G. Berdasarkan Proposisi 2 maka $(\mu^c)^c = \mu$ sehingga berdasarkan Teorema 3.1.3 $(\mu^c)^c$ adalah anti subgrup fuzzy dari G. ■

Teorema 3.1.6
Jika μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari sebuah grup G, maka $(\mu^c)^c$ adalah subgrup fuzzy dari G.
Bukti:
Diketahui μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari grup G akan dibuktikan $(\mu^c)^c$ adalah subgrup fuzzy dari G. Berdasarkan Proposisi 2 maka $(\mu^c)^c = \mu$ sehingga berdasarkan Teorema 3.1.2 $(\mu^c)^c$ adalah anti subgrup fuzzy dari G. ■

Proposisi 3.1.7
Misalkan μ adalah anti subgrup fuzzy dari G jika hanya jika untuk setiap $x, y \in G$,

$$\mu(xy^{-1}) \leq max\{\mu(x), \mu(y)\}.$$

Bukti:
(⇒)
Diketahui μ adalah anti subrup fuzzy dari G, akan dibuktikan $\mu(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$
Diambil sebarang $x, y \in G$ dikenakan ke fungsi μ, karena μ adalah anti subgrup fuzzy sehingga berdasarkan Definisi 13 (i)

$$\mu(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y^{-1})\}$$

Karena μ adalah anti subgrup fuzzy maka berdasarkan Definisi 13 (ii) berlaku $\mu(y^{-1}) \leq \mu(y)$ sehingga

$$\mu(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y^{-1})\} \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

Akibatnya

$$\mu(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

(⇐)
Diketahui $\mu(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$, akan dibuktikan μ adalah anti subgrup fuzzy
Diberikan sebarang $x, y \in G$ sedemikian sehingga

$$\mu(xy^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

Karena G grup maka untuk untuk setiap $x \in G$ terdapat $x^{-1} \in G$ sedemikian sehingga ada $e \in G$ yaitu $xx^{-1} = e$ dan karena μ adalah subset fuzzy yang merupakan fungsi maka

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x)$$

Jadi $\mu(e) \leq \mu(x)$ Selanjutnya

$$\mu(x^{-1}) = \mu(ex^{-1}) \leq \max\{\mu(e), \mu(x)\} = \mu(x)$$

Jadi $\mu(x^{-1}) \leq \mu(x)$ Selanjutnya karena G grup maka berdasarkan Proposisi 6 untuk $y \in G$ ada $y^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $y = (y^{-1})^{-1}$ maka

$$\mu(xy) = \mu(x(y^{-1})^{-1}) \leq \max\{\mu(x), \mu(y^{-1})\} \leq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$$

Jadi, μ adalah anti subgrup fuzzy maka proposisi terbukti. ■

Teorema 3.1.8
Jika μ adalah subgrup fuzzy dari grup G, maka

$$G_{\mu^c} = \{x \in G : \mu^c(e) = \mu^c(x)\}$$

adalah subgrup dari G.
Bukti:
Diketahui μ adalah subgrup fuzzy dari G. Akan dibuktikan $G_{\mu^c} = \{x \in G : \mu^c(e) = \mu^c(x)\}$ adalah subgrup dari G

ISSN: 2807-324X

Berdasarkan sifat keanggotaan dari $G_{\mu^c} = \{x \in G : \mu^c(e) = \mu^c(x)\}$ maka terpenuhi kondisi $G_{\mu^c} \subseteq G$. Karenakan G grup maka $\mu^c(e) = \mu^c(e)$, sehingga berdasarkan keanggotaan G_{μ^c} diperoleh $e \in G_{\mu^c}$. Jadi, $G_{\mu^c} \neq \emptyset$.
Diambil sebarang $z, w \in G_{\mu^c}$, Karena μ subgrup fuzzy berdasarkan Definisi 12 dan Definisi 10 (i) maka

$$\begin{aligned}\mu^c(zw) &= 1 - \mu(zw) \leq 1 - \min\{\mu(z), \mu(w)\}\\ &= \max\{(1-\mu(z)), (1-\mu(w))\}\\ &= \max\{\mu^c(z), \mu^c(w)\}\\ &= \max\{\mu^c(e), \mu^c(e)\}\\ &= \mu^c(e)\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.1.2 maka μ^c adalah anti subgrup fuzzy sehingga berdasarkan Proposisi 3.1.1 (i) $\mu^c(zw) \geq \mu^c(e)$ akibatnya $\mu^c(zw) = \mu^c(e)$
dan Berdasarkan Proposisi 11 (ii) maka $\mu(z^{-1}) = \mu(z)$ akibatnya

$$\mu^c(z^{-1}) = 1 - \mu(z^{-1}) = 1 - \mu(z) = \mu^c(z) = \mu^c(e)$$

Jadi, $zw \in G_{\mu^c}$ dan $z^{-1} \in G_{\mu^c}$
Jadi, Berdasarkan Teorema 7 G_{μ^c} adalah subgrup dari G. ■

Teorema 3.1.9
Jika μ adalah anti subgrup fuzzy dari grup G, maka

$$G_\mu = \{x \in G : \mu(e) = \mu(x)\}$$

adalah subgrup dari G.
Bukti:
Diketahui μ adalah anti subgrup fuzzy dari G. Akan dibuktikan $G_\mu = \{x \in G : \mu(e) = \mu(x)\}$ adalah subgrup dari G
Berdasarkan sifat keanggotaan dari $G_\mu = \{x \in G : \mu(e) = \mu(x)\}$ maka terpenuhi kondisi $G_\mu \subseteq G$. Karenakan G grup maka $\mu(e) = \mu(e)$, sehingga berdasarkan keanggotaan G_μ diperoleh $e \in G_\mu$. Jadi, $G_\mu \neq \emptyset$.
Diambil sebarang $z, w \in G_\mu$, Karena μ anti subgrup fuzzy berdasarkan Definisi 12 dan Definisi 13 (i) maka

$$\begin{aligned}\mu(zw) &\leq \max[\mu(z), \mu(w)\}\\ &= \max\{\mu(e), \mu(e)\}\\ &= \mu(e)\end{aligned}$$

Selanjutnya, berdasarkan proposisi 3.1.1 (i)

$$\mu(zw) \geq \mu(e)$$

Akibatnya $\mu(zw) = \mu(e)$
Dan Berdasarkan Proposisi 3.1.1 (ii) maka $\mu(z^{-1}) = \mu(z)$ sehingga

$$\mu(z^{-1}) = \mu(z) = \mu(e)$$

Akibatnya $zw \in G_\mu$ dan $z^{-1} \in G_\mu$
Jadi, berdasarkan Teorema 7 maka, G_μ adalah subgrup dari G. ■

Teorema 3.1.10
Jika μ adalah anti subgrup fuzzy dari grup G, maka

$$G_{\mu^c} = \{x \in G : \mu^c(e) = \mu^c(x)\}$$

adalah subgrup dari G
Bukti:
Diketahui μ adalah anti subgrup fuzzy dari G. Akan dibuktikan $G_{\mu^c} = \{x \in G : \mu^c(e) = \mu^c(x)\}$ adalah subgrup dari G

ISSN: 2807-324X

Berdasarkan sifat keanggotaan dari $G_{\mu^c} = \{x \in G : \mu^c(e) = \mu^c(x)\}$ maka terpenuhi kondisi $G_{\mu^c} \subseteq G$. Karenakan G grup maka $\mu^c(e) = \mu^c(e)$, sehingga berdasarkan keanggotaan G_{μ^c} diperoleh $e \in G_{\mu^c}$. Jadi, $G_{\mu^c} \neq \emptyset$.
Diambil sebarang $z, w \in G_{\mu^c}$, Karena μ anti subgrup fuzzy berdasarkan Definisi 12 dan Definisi 13 (i) maka

$$\begin{aligned} \mu^c(zw) &= 1 - \mu(zw) \geq 1 - \max\{\mu(z), \mu(w)\} \\ &= \min\{(1-\mu(z)), (1-\mu(w))\} \\ &= \min\{\mu^c(w), \mu^c(z)\} \\ &= \min\{\mu^c(e), \mu^c(e)\} \\ &= \mu^c(e) \end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 3.1.3 maka μ^c adalah subgrup fuzzy sehingga berdasarkan Proposisi 11 (i) $\mu^c(zw) \leq \mu(e)$ akibatnya $\mu^c(zw) = \mu^c(e)$
dan Berdasarkan Teorema 3.1.1 (ii) maka $\mu(z^{-1}) = \mu(z)$ akibatnya

$$\mu^c(z^{-1}) = 1 - \mu(z^{-1}) = 1 - \mu(z) = \mu^c(z) = \mu^c(e)$$

Jadi, $zw \in G_{\mu^c}$ dan $z^{-1} \in G_{\mu^c}$
Jadi, Berdasarkan Teorema 7 G_{μ^c} adalah subgrup dari G. ■

Teorema 3.1.11
Misalkan ν dan μ adalah anti subgrup fuzzy dari grup G. Jika $\mu \subseteq \nu$ dan $\nu(e) = \mu(e)$, maka $G_{\nu^c} \subseteq G_{\mu^c}$.
Bukti:
Diketahui ν dan μ adalah anti subgrup fuzzy dari grup G. Jika $\mu \subseteq \nu$ dan $\nu(e) = \mu(e)$, akan dibuktikan $G_{\nu^c} \subseteq G_{\mu^c}$.
Karena $\mu \subseteq \nu$ maka

$$\begin{aligned} &\mu(x) \leq \nu(x) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \mu(x) \geq 1 - \nu(x) \\ \Leftrightarrow\ &\mu^c(x) \geq \nu^c(x) \end{aligned}$$

untuk $x \in G$
Diambil sebarang $x \in G_{\nu^c}$ yang berarti

$$\nu^c(x) = \nu^c(e)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} &\mu^c(x) \geq \nu^c(e) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \mu(x) \geq 1 - \nu(e) \\ \Leftrightarrow\ &1 - \mu(x) \geq 1 - \mu(e) \\ \Leftrightarrow\ &\mu^c(x) \geq \mu^c(e) \end{aligned}$$

Karena μ anti subgrup fuzzy berdasarkan Teorema 3.1.2 μ^c merupakan subgrup fuzzy, sehingga berdasarkan Proposisi 11 (i) maka

$$\mu^c(x) \leq \mu^c(e)$$

Akibatnya $\mu^c(x) = \mu^c(e)$ sehingga $x \in G_{\mu^c}$
Jadi, $G_{\nu^c} \subseteq G_{\mu^c}$. ■

Teorema 3.1.12
Diberikan $N(\neq \emptyset)$ adalah subset dari grup G. Jika $\mu: N \to [0,1]$.

$$\mu(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} q, & x \in N \\ r, & x \notin N \end{cases}$$

untuk semua $x \in G$ dan $0 \leq r < q \leq 1$, maka N adalah subgrup daripada G jika dan hanya jika μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G dan $G_{\mu^c} = N$.
Bukti:
Diketahui $N(\neq \emptyset)$ adalah subset dari grup G. Jika $\mu: N \to [0,1]$.

ISSN: 2807-324X

$$\mu(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} q, & x \in N \\ r, & x \notin N \end{cases}$$

untuk semua $x \in G$ dan $0 \leq r < q \leq 1$, akan dibuktikan N adalah subgrup daripada G jika dan hanya jika μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G dan $G_{\mu^c} = N$.

($\Rightarrow$)

Diketahui N adalah subgrup daripada G akan dibuktikan μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G dan $G_{\mu^c} = N$.

Diambil sebarang $x, y \in N$ maka akan diselidiki tiga kasus untuk semua $x, y \in N$, yaitu :

(1) Untuk $x, y \notin N$ maka $\mu(x) = r$ dan $\mu(y) = r$ oleh karena keanggotaan itu maka $\mu(xy) \geq r = \min\{r.r\} = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}\mu^c(xy) &= 1 - \mu(xy) \\ &\leq 1 - r \\ &= \max\{(1-r),(1-r)\} \\ &= \max\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}\end{aligned}$$

Selanjutnya

Karena $x \notin N$ maka $\mu(x^{-1}) \geq r = \mu(x)$sehingga

$$\mu^c(x^{-1}) = 1 - \mu(x^{-1}) \leq 1 - r = \mu^c(x)$$

(2) Untuk $x \in N$ atau $y \notin N$ maka $\mu(x) = q$ atau $\mu(y) = r$ oleh karena keanggotaan itu maka $\mu(xy) \geq r = \min\{r.q\} = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}&\mu^c(xy) = 1 - \mu(xy) \\ &\leq 1 - r \\ &= \max\{(1-q),(1-r)\} \\ &= \max\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}\end{aligned}$$

Selanjutnya

Karena $y \notin N$ maka $\mu(y^{-1}) \geq r = \mu(y)$ sehingga

$$\mu^c(y^{-1}) = 1 - \mu(y^{-1}) \leq 1 - r = \mu^c(y)$$

atau

Karena $x \in N$ maka $\mu(x^{-1}) = q = \mu(x)$ sehingga

$$\mu^c(x^{-1}) = 1 - \mu(x^{-1}) = 1 - q = \mu^c(x)$$

(3) Untuk $x, y \in N$ maka $\mu(x) = q$ dan $\mu(y) = q$ oleh karena keanggotaan itu maka $\mu(xy) = q = \min\{q.q\} = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}&\mu^c(xy) = 1 - \mu(xy) \\ &= 1 - q \\ &= \max\{(1-q),(1-q)\} \\ &= \max\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}\end{aligned}$$

Selanjutnya

Karena $x \in N$ maka $\mu(x^{-1}) = q = \mu(x)$ sehingga

$$\mu^c(x^{-1}) = 1 - \mu(x^{-1}) = 1 - q = \mu^c(x)$$

Jadi, untuk setiap $x, y \in G$, terpenuhi kondisi :

$\mu^c(xy) \leq \max\{\mu^c(x), \mu^c(y)\}$ dan $\mu^c(x^{-1}) \leq \mu^c(x)$

Jadi, berdasarkan Definisi 13 μ^c adalah anti subgrup fuzzy dari G.

Selanjutnya, diketahui N adalah subgrup daripada G, mengakibatkan $e \in N$. Oleh sebab itu

$$\begin{aligned}G_{\mu^c} &= \{x \in G : \mu^c(x) = \mu^c(e)\} \\ &= \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\} \\ &= \{x \in G : \mu(x) = q\} \\ &= \{x \in G : x \in N\} \\ &= N\end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

ISSN: 2807-324X

Diketahui μ^c merupakan anti subgrup fuzzy dari G dan $G_{\mu^c} = N$. Akan dibuktikan N merupakan subgrup daripada G. Oleh karena μ^c merupakan anti subgrup fuzzy dan $G_{\mu^c} = N$, maka berdasarkan Teorema 3.1.9 $G_{\mu^c} = N$ merupakan subgrup dari G. ■

Akibat 3.1.13
Suatu Fungsi Karakteristik $\mathcal{X}_N$ dari sebuah subset tidak kosong N dari grup G adalah anti subgrup fuzzy dari G dan $G_{\mathcal{X}_N} = N$ jika dan hanya jika N merupakan subgrup daripada G
Bukti:
(⇒)
Diketahui fungsi karakteristik $\mathcal{X}_N$ dari subset tidak kosong N dari grup G adalah anti subgrup fuzzy dari G dan $G_{\mathcal{X}_N} = N$ akan dibuktikan N merupakan subgrup daripada G. Oleh karena $\mathcal{X}_N$ adalah sebuah fungsi karakteristik maka

$$\mathcal{X}_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x \in N \\ 0, & x \notin N \end{cases}$$

Sehingga berdasarkan Teorema 3.1.12 $G_{\mathcal{X}_N} = N$ adalah subgrup daripada G
(⇐)
Diketahui fungsi karakteristik $\mathcal{X}_N$ dari subset tidak kosong N dari grup G adalah anti subgrup fuzzy dari G dan N merupakan subgrup daripada G akan dibuktikan $G_{\mathcal{X}_N} = N$. Oleh karena $\mathcal{X}_N$ adalah sebuah anti subgrup fuzzy dan N merupakan subgrup daripada G sedemikian sehingga

$$G_{\mathcal{X}_N} = \{x \in G : \mathcal{X}_N(x) = \mathcal{X}_N(e)\}$$

Berdasarkan Teorema 3.1.12 maka $e \in N$ sehingga $x \in N$ yang mengakibatkan $G_{\mathcal{X}_N} = N$. ■

semua $x, y \in G_{\mu^c}$ berlaku $xy \in G_{\mu^c}$ dan $x^{-1} \in G_{\mu^c}$ sehingga berdasarkan Teorema 7 G_{μ^c} merupakan subgrup daripada G. ■

4. Penutup

Kondisi dari μ anti subgrup fuzzy dari suatu grup G, berpengaruh kepada pembentukan subgrup berdasarkan komplemennya yaitu komplemennya μ^c subgrup fuzzy berlaku sebaliknya dan G_{μ^c} merupakan subgrup dari G.

Daftar Pustaka

Biswas, R. (1990). Fuzzy Subgroups and Anti Fuzzy Subgroups. *Fuzzy Sets and Systems*, 35(1), 121-124.

Ford , T. J. (2020). *Introduction to Abstract Algebra.* Boca Raton: Florida Atlantic University.

Abdurrahman, S. (2022). Anti Subsemiring Fuzzy. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan "Epsilon"*, 16(1), 83-92.

Abdurrahman, S. (2012). Ideal Fuzzy Near-Ring. *Jurnal Epsilon*, 6(2), 13–19.

Abdurrahman, S. (2020). Karakteristik subsemiring fuzzy. *Jurnal Fourier*, 9(1), 19–23

Walker, E. A. (1998). *Introduction to Abstract Algebra.* Las Cruces, New Mexico: Scientific Workplace.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Inform. and Control*. 8(3):338-353.

Rosenfield, A. (1981). Fuzzy Groups. *Journal Of Mathematical Analysis and Applications*. 35(3):512-517.

Das, P. S. (1971). Fuzzy Groups and Level Subgroups . *Journal Of Mathematical Analysis and Applications*. 84(1):264-269.

Saravanan, V., & Sivakumar, D. (2011). A Study on Anti - Fuzzy Subsemiring of a Semiring. *International Journal of Computer Applications*, 35(5), 44–47.

ISSN: 2807-324X

Ucapan Terimakasih

Penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada pihak-pihak yang berjasa kepada tulisan ini. Terima kasih kepada Program Studi Matematika Universitas Lambung Mangkurat dan pihak-pihak yang berada di Program Studi Matematika Universitas Lambung Mangkurat.