SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA DAN PENDIDIKAN MATEMATIKA (7th SENATIK)
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FPMIPATI-UNIVERSITAS PGRI SEMARANG
Semarang, 26 November 2022

ISBN: 2807-324X (online)

Pengontruksian Golden Ratio dari Barisan Fibonacci

Rengga Nanda Pramudya*, Moch Idris

Matematika FMIPA, Universitas Lambung Mangkurat, Jl. Ahmad Yani KM 36, Loktabat Selatan Banjarbaru Selatan, Banjarbaru 70713, Indonesia

*Penulis Korespondensi: 1811011120012@mhs.ulm.ac.id

Abstract.There are several ways to construct golden ratio, one of which is using the Fibonacci sequence. The Fibonacci sequence is a sequence that is formed from the addition of two terms, namely a term with the previous term. The construction process begins by forming a (r_n) ratio sequence from the Fibonacci sequence. The process is continued by investigating the convergence of the (r_n) sequence, starting from checking the limitations and monotony of the (rn) sequence. The investigation of the convergence of the (r_n) sequence is continued by using the Cauchy criteria. The sequence (r_n) is shown to be a Cauchy sequence, so (r_n) is shown to be a convergent sequence. Because (r_n) converges, further investigation is carried out to find out the convergence point of the rn sequence which turns out to be convergent towards golden ratio.
Keywords: golden ratio; Fibonacci; regular pentagon

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ibu dari semua bidang ilmu pengetahuan. Hal itu yang menyebabkan matematika disebut sebagai ”Ratu Ilmu”. Sebagai ”Ratu Ilmu”, matematika bukanlah pengetahuan yang dapat menjadi sempurna untuk dirinya sendiri, tetapi matematika berfungsi untuk membantu orang memahami dan mengatasi masalah sosial, ekonomi dan alam (Kline, 1973). Terlepas dari manfaat yang diberikan, matematika juga penuh dengan keindahan. ”Mathematics rightly viewed possesses, not only truth but supreme beauty” atau matematika yang dipandang dengan benar, tidak hanya memiliki kebenaran tetapi juga keindahan tertinggi (Russel, 1907). Salah satu keindahan dalam matematika adalah konsep golden ratio. Ada beberapa orang bahkan menyebut golden ratio sebagai angka Tuhan. Ada pula beberapa orang yang beranggapan konsep dari golden ratio merupakan kunci untuk mengungkap rahasia alam semesta. Hal ini disebabkan karena banyak pola pada kehidupan sehari-hari mendekati atau bahkan tepat dengan golden number. Salah satu contohnya seperti yang disebutkan oleh Nuvilailani dalam situsnya https://geometryarchitecture.wordpress.com/2013/03/24/kabahtitik-golden-ratio-bumi/ bahwa rasio jarak antara Makkah dengan kutub utara dan Makkah dengan kutub selatan yaitu $1{:}\,1{,}618$ yang merupakan hampiran dari golden ratio. Hal itu pula yang menyebabkan Makkah disebut The golden ratio point of the world atau titik rasio emas di dunia.

Harmoni dan proporsi dari golden ratio sudah diakui oleh sebagian besar ilmuwan terkenal dunia. Golden ratio juga termasuk ke dalam standar kecantikan dan estestika. Tak heran jika golden ratio banyak digunakan oleh desainer dan seniman dunia dalam pembuatan karya seni. Hal ini banyak kita jumpai pada hasil seni dan bangunan bersejarah dunia.

Ada beberapa cara mengontruksi golden ratio, salah satunya menggunakan barisan Fibonacci. Barisan Fibonacci adalah konsep barisan yang diperkenalkan oleh Leonardo da Pisa atau Leonardo

ISBN: 2807-324X (online)

Pisano atau dikenal sebagai Fibonacci pada tahun 1202. Bilangan-bilangan pada barisan Fibonacci sebenarnya banyak terdapat di alam. Salah satunya jumlah kelopak bunga biasanya merupakan bilangan Fibonacci, jumlah perkembangan dahan juga mengikuti pola dari barisan Fibonacci, kemudian sepasang kelinci yang dilepas di tempat tertutup, asumsikan semisal di sebuah pulau, perkembangbiakan kelinci tersebut setelah diamati ternyata mengikuti pola barisan Fibonacci (Pisano, 1202). Berdasarkan beberapa hal di atas, akan diselidiki bagaimana barisan Fibonacci dapat mengontruksi golden ratio.

2. Metode

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode deskriptif kualitatif dan juga kuantitatif. Metode kualitatif ini, data yang diperlukan didapatkan dari analisis terhadap beberapa buku yang kemudian dikumpulkan menjadi satu. Metode ini digunakan pada pengumpulan lemma maupun teorema yang diperlukan mengenai barisan Fibonacci dan golden ratio serta beberapa materi penunjang lainnya. Metode kuantitatif dilakukan dengan melakukan percobaan perhitungan terhadap data yang telah dikumpulkan. Perhitungan dilakukan diantaranya keterbatasan barisan rasio Fibonacci, kemonotonan barisan rasio Fibonacci dan juga barisan rasio Fibonacci yang merupakan barisan Cauchy. Metode ini digunakan setelah lemma maupun teorema didapatkan sampai didapatkan hasil yang diinginkan.

3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas mengenai cara pengontruksian golden ratio. Diawali dengan teori dan konsep tentang bagaimana golden ratio dapat terbentuk dengan menggunakan barisan rasio Fibonacci.

3.1. Barisan Rasio Fibonacci

Barisan Fibonacci didefinisikan sebagai

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 3$ dengan $f_1 = 1$ dan $f_2 = 1$. Suku-suku pada barisan (f_n) dituliskan sebagai

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots).$$

Pengontruksian golden ratio dengan menggunakan barisan Fibonacci maka akan dibentuk barisan baru yang dinamakan dengan barisan rasio Fibonacci (r_n). Barisan rasio Fibonacci (r_n) merupakan barisan yang dibentuk dari rasio perbandingan suatu suku dengan suku sebelumnya pada barisan Fibonacci secara berurutan. Berikut ini dibentuk barisan rasio Fibonacci (r_n) yang juga disampaikan Hauser (2015) dengan

$$r_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Suku-suku pada barisan (r_n) dituliskan sebagai

$$(r_n) = \left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots\right).$$

Tabel 1. Suku-suku barisan (r_n)

r_n	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...
Nilai	1	2	1,5	1,67	1,6	...

Pada Tabel 1 di atas terlihat bahwa $r_1 < r_2$ sementara $r_2 > r_3$, namun $r_3 < r_4$ sementara $r_4 > r_5$. Berdasarkan hal ini maka suku-suku pada barisan (r_n) memiliki pola yaitu $r_n < r_{n+1}$ dengan $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ dan $r_n > r_{n+1}$ dengan $n \in 2\mathbb{Z}$. Berdasarkan Teorema 2.2 barisan Fibonacci merupakan barisan yang divergen. Namun demikian tidak menjamin bahwa barisan rasio Fibonacci memiliki karakteristik yang sama dengan barisan Fibonacci. Berdasarkan hal ini, maka akan diselidiki barisan rasio Fibonacci (r_n),apakah divergen selayaknya barisan Fibonacci atau justru konvergen menuju suatu nilai. Barisan

ISBN: 2807-324X (online)

rasio Fibonacci terbukti memiliki batas atas dan batas bawah sehingga dapat dikatakan terbatas. Hal ini dapat dilihat pada teorema berikut.

Lemma 1
Jika (r_n) *merupakan barisan rasio Fibonacci maka* (r_n) *terbatas untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dengan* $1 \leq r_n \leq 2$.

Lemma di atas telah menunjukkan batas atas dan batas bawah untuk r_n. Sekarang coba selidiki lebih lanjut batas atas dan batas bawah untuk $\frac{1}{r_n}$ seperti berikut.

Lemma 2
Jika (r_n) *terbatas untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dengan* $1 \leq r_n \leq 2$ *maka berlaku* $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{r_n} \leq 1$.

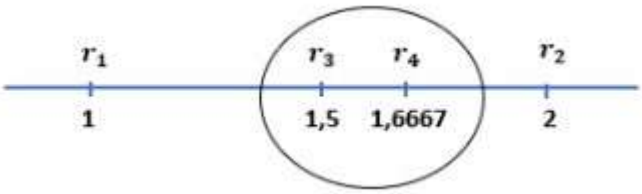
Dari dua lemma di atas maka selanjutnya kita dapat memperbesar batas bawah interval (r_n) seperti terlihat pada dua lemma berikut ini.

Lemma 3
Jika (r_n) *merupakan barisan rasio Fibonacci maka* (r_n) *terbatas untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dengan* $\frac{3}{2} \leq r_{n+1} \leq 2$.

Lemma 4
Jika (r_n) terbatas untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $\frac{3}{2} \leq r_{n+1} \leq 2$ maka berlaku $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{r_n} \leq \frac{2}{3}$.

Barisan (r_n) terbukti terbatas, namun apakah hal ini cukup untuk membuktikan bahwa barisan ini konvergen? Tentu harus diusut lebih dalam lagi mengingat terdapat barisan yang terbatas namun tidak konvergen. Barisan dikatakan konvergen jika barisan tersebut terbatas dan monoton. Oleh karena itu, kita akan mengecek kemonotonan dari barisan (r_n). Pada barisan rasio Fibonacci$(r_n) = (1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $r_2 = 2$ dan $r_3 = \frac{3}{2}$ sedemikian hingga $r_n > r_{n+1}$ dan terdapat $r_1 = 1$ dan $r_2 = 2$ sedemikian hingga $r_n < r_{n+1}$, sehingga (r_n) tidak monoton.

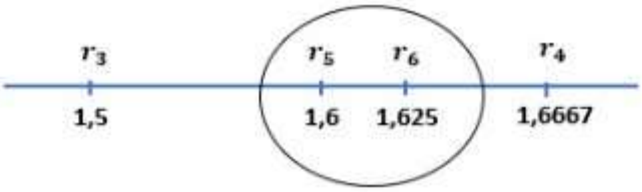
Hal ini tentu sangat disayangkan mengingat barisan (r_n) telah terbukti merupakan barisan yang terbatas namun ternyata terbukti tidak monoton. Identifikasi lebih lanjut mengenai kekonvergenan ini, kita akan mencoba menggunakan garis bilangan. Hal ini dilakukan untuk memperkuat bahwa (r_n) tidak monoton. Hal ini juga berfungsi untuk menyelidiki apakah (r_n) menuju suatu nilai sehingga membuka kemungkinan bahwa (r_n) konvergen. Pengambilan nilai atau bilangan pada garis bilangan ini berdasarkan pada Tabel 1. Hasil rasio dari barisan rasio Fibonacci ditunjukkan pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Garis Bilangan Rasio (r_n)

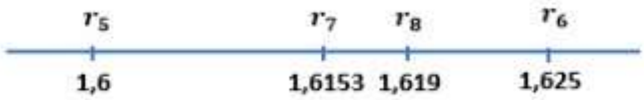
ISBN: 2807-324X (online)

Pada Gambar 1 di atas terlihat bahwa $r_1 < r_2$ tetapi $r_2 > r_3$ kemudian untuk $r_3 < r_4$. Mari kita lihat lebih dekat untuk mengetahui posisi suku (r_n) yang lain pada Gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2. Garis Bilangan Rasio (r_n)

1. Terlihat pada Gambar 2 di atas bahwa posisi $r_4 > r_5$ sementara $r_5 < r_6$. Hal ini memperkuat bahwa $r_n < r_{n+1}$ dengan $n \in 2\mathbb{Z} + 1$ dan $r_n > r_{n+1}$ dengan $n \in 2\mathbb{Z}$. Mari kita perbesar Gambar 2 sekali lagi untuk memastikan apakah pola ini benar.



Gambar 3. Garis Bilangan Rasio (rn)

Jika penggambaran di atas dilanjutkan maka barisan ini akan semakin mendekat dan mendekat satu sama lain seiring bertambah besar n. Barisan ini menuju suatu nilai tertentu yang berada di antara suku-suku sebelumnya. Berdasarkan penggambaran menggunakan garis bilangan di atas terlihat bahwa barisan rasio Fibonacci (f_n) semakin menyempit. Penyempitan ini menuju ke suatu nilai sehingga diduga bahwa barisan ini konvergen.

Setelah membentuk barisan rasio Fibonacci (r_n) dari barisan Fibonacci (f_n), maka penyelidikan dilanjutkan dengan cara lain. Cara yang akan digunakan yaitu menggunakan kriteria Cauchy seperti terlihat pada Teorema berikut ini.

Teorema 5
Jika (r_n) merupakan barisan rasio Fibonacci maka (r_n) barisan Cauchy.

Pada teorema di atas terbukti bahwa barisan (r_n) merupakan barisan Cauchy. Barisan bilangan real (r_n) akan konvergen jika dan hanya jika (r_n) merupakan barisan Cauchy. Mengikuti dua hal ini maka terbukti (r_n) konvergen. Kekonvergenan sebuah fungsi dapat dicari dengan menggunakan limit yaitu $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

3.2. Pengontruksian Golden Ratio oleh Barisan Fibonacci

Barisan Cauchy telah membantu mengetahui bahwa (r_n) merupakan barisan yang konvergen. Namun, kelemahan dari cara ini adalah belum dapat diketahui titik konvergen dari (r_n). Asumsikan bahwa (r_n) konvergen ke suatu bilangan L maka dalam bentuk limit dituliskan menjadi

$$\lim_{n \to \infty} r_n = L,$$

dengan $L \neq 0$, sehingga untuk $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{r_n}$ menjadi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{r_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} 1}{\lim_{n \to \infty} r_n} = \frac{1}{L}.$$

ISBN: 2807-324X (online)

Barisan (r_n) konvergen ke L maka berlaku untuk $\frac{1}{r_n}$ konvergen ke $\frac{1}{L}$ Kemudian untuk $\frac{1}{r_{n-1}}$ akan konvergen juga ke $\frac{1}{L}$.

Dapat dilihat lebih lanjut barisan (r_n),

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n},$$
$$= \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n},$$
$$= 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$$

Akan digunakan bentuk limit kembali

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r_{n-1}}$$

Berdasarkan perhitungan sebelumnya, maka dapat dituliskan menjadi

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

Persamaan ini memiliki bentuk yang persis seperti perbandingan segmen garis yang membentuk golden ratio. Ubah ke dalam persamaan kuadrat seperti berikut.

$$L^2 = L + 1,$$
$$L^2 - L - 1 = 0.$$

Mengikuti perhitungan golden ratio, maka diperoleh

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Dengan kata lain, barisan rasio Fibonacci (r_n) konvergen menuju golden ratio.

4. Penutup

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa titik golden ratio dapat diperoleh dengan menggunakan barisan Fibonacci. Barisan Fibonacci merupakan barisan yang diperoleh dengan menjumlahkan dua suku sebelumnya, yaitu $f_n := f_{(n-1)} + f_{(n-2)}$ untuk $n \geq 3$ dengan $f_1 = 1$ dan $f_2 = 1$. Pada barisan Fibonacci kita dapat membentuk barisan baru yaitu barisan rasio Fibonacci (r_n). Barisan rasio Fibonacci (r_n) merupakan barisan yang dibentuk dari rasio perbandingan suatu suku dengan suku sebelumnya pada barisanFibonacci secara berurutan, yaitu $r_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Barisan rasio Fibonacci (r_n) setelah diselidiki terbukti terbatas. Batas barisan (r_n) cukup sempit yaitu $\frac{3}{2} \leq r_n \leq 2$ sedemikian hingga berlaku $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{r_n} \leq \frac{2}{3}$. Menggunakan batas yang diketahui maka barisan rasio Fibonacci (r_n) terbukti merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ sehingga (r_n) konvergen. Setelah (r_n) terbukti konvergen, maka diasumsikan (r_n) konvergen menuju suatu titik yaitu L, sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk $L = 1 + \frac{1}{L}$. Penyelidikan ini berakhir dengan diketahui bahwa $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ yang merupakan golden ratio.

Saran : Pengontruksian golden ratio dalam penelitian ini menggunakan barisan Fibonacci, namun sebenarnya barisan Fibonacci hanya salah satu cara untuk mengontruksi golden ratio. Berdasarkan hal ini, setelah melihat bagaimana pengontruksian golden ratio dari barisan Fibonacci akan memotivasi penulis lain untuk mengontruksi dengan cara yang lain.

ISBN: 2807-324X (online)

Daftar Pustaka

Bartle, R.G. & Sherbert, R. D. (2011). *Introduction to Real Analysis*, Edisi ke-4. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bourchtein, L. (2022). *Theory of Infinite Sequences and Series*. Pelotas: Institute of Physics and Mathematics Federal University of Pelotas.

Horadam, A. F. (1961). *A generalized Fibonacci sequence.* The American Mathematical Monthly, 68(5), 455-459.

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. (2018). *Matematika Kelas IX*. Jakarta: Kemendikbud.

Koshy,T. (2018). *Fibonacci and Lycas Number with Applications*. Canada: AWiley-Interscience Publication.

Meisner, G. B. (2018). *The golden ratio: The divine beauty of mathematics*. Race Point Publishing.

Nuvilailani. (2013). *Ka'bah: Titik Golden Ratio Bumi*. Diakses pada 30 September 2022, dari https://geometryarchitecture.wordpress.com/2013/03/24/kabah-titikgolden-ratio-bumi/.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2011). *The glorious golden ratio*. Prometheus Books.

Riyanto,M.Z. (2008). *Pengantar Analisis Real I*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Ross, K.A. (2010). *Elementary analysis*. USA: Springer.

Ucapan Terimakasih

Dengan diselesaikannya paper ini saya pribadi mengucapkan banyak terimakasih kepada pihak-pihak yang telah membantu terselesaikannya paper ini. Terimakasih kepada bapak dosen yang sudah memberikan bimbingan, staf yang sudah membantu mengurus segala hal, serta dari pihak senatik UPGRIS yang telah memberikan arahan sehingga paper ini bisa diselesaikan.