Sifat Relasi pada Ruang Barisan $\left(\overbar{N},q\right)$

**Salwa1\*, Qurratul Aini2**

Universitas Mataram

\*Penulis Korespondensi: salwa@unram.ac.id

**Abstract** Sequence space is one of the topics that is often researched by researchers in the field of mathematical analysis. Such as the properties of its completeness and the relation between the sequence spaces. However, this study aims to see how the proerties of the relation in the sequence space $\left(\overbar{N},q\right)$ and its dual β. This research determine several theorems related to the relation between the sequence space $\left(\overbar{N},q\right)$ with its dual β.

.

**Keywords:** sequence space; dual β; relation

1. **Pendahuluan**

.

Analisis merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang di dalamnya banyak membicarakan mengenai konsep, aksioma, teorema maupun lemma yang disertai dengan pembuktian dan contoh-contoh baik yang bersifat ilustrasi maupun penyangkal.

Ruang barisan merupakan salah satu topik kajian dalam bidang analisis yang mebahas tentang barisan. Barisan merupakan fungsi pada bilangan asli. Jika range dari barisan tersebut merupakan himpunan semua bilangan real maka disebut barisan bilangan real, jika range fungsi tersebut berada pada himpunan semua bilangan kompleks maka disebut barisan bilangan kompleks. Beberapa ruang barisan lain yang telah ditemukan oleh matematikawan bidang minat analisis diantaranya adalah ruang barisan terbatas, ruang barisan konvergen, ruang BK dan lain-lain.

para matematikawan seperti Malkowsky dan Recocevic meneliti tentang ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$, selanjutnya M. Mursaleen dan A.K. Noman melakukan penelitian lebih lanjut mengenai ruang barisan $λ-$konvergen dan terbatas, yang selanjutnya dapat dijadikan referensi untuk mengembagkan penelitian lebih lanjut, seperti melakukan hal yang serupa tapi pada ruang barisan yang terboboti. Pada ruang barisan tersebut dapat ditentukan ruang dualnya seperti ruang $β$-dual, selanjutnya salwa dkk meneliti tentang $β$-dual ad ruang barisan $\left(\overbar{N},∆λ\right)$.

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat relasi dari ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$, sedangkan tujuan dari penelitain ini adalah untuk mengetahui sifat-sifat relasi antara ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$. Pada penelitian yang dilakukan oleh Malkowsky dan Rekocevik belum diteliti mengenai sifat relasi inklusi pada ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$, sebagaimana yang sudah diteliti oleh M. Mursaleen dan A.K pada ruang barisan $\left(\overbar{N},∆λ\right)$. Oleh karena itu harapannya pada penelitian ini dapat diketahui sifat-sifat relasi inklusi pada ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$.

1. **Metode**

Penelitian ini merupakan studi literatur dengan mengkaji beberapa buku dan jurnal terkait ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ serta didukung juga dengan jurnal dan buku terkait ruang barisan lain yang masih terkait ruang barisan tersebut, setelah itu dibangun konjektur-konjektur terkait sifat ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ dan membuktikan konjektur-konjektur tersebut, kemudian ditarik kesimpulan sebagai hasil penelitian.

1. **Hasil dan Pembahasan**

Adapun hasil dan pembahasan dari penelitian ini disajikan dalam penjelasan berikut

Definisi 3.1

Diberikan barisan positif $\left(q\_{k}\right)\_{k\geq 1}$ dan Q merupakan barisan dengan $Q\_{n}=\sum\_{k=1}^{n}q\_{k}$ dan matriks $\overbar{N}\_{q}$ yang didefinisikan dengan

$\left(\overbar{N}\_{q}\right)\_{n,k}=\left\{\begin{array}{c}\frac{q\_{k}}{Q\_{n}}, \left(0\leq k\leq n\right)\\0, \left(k>n\right)\end{array}\right. $ (1)

(Malkowsy dan Rekocevic, 2$00$1).

Selanjutnya untuk menyederhanakan bentuk barisan dalam ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ maka didefinisikan barisan $τ\_{n}$ berikut

Definisi 3.2

Untuk setiap $x\in X$, dinotasikan $τ=τ\left(x\right)$ untuk barisan yang didefinisikan dengan

$τ\_{n}=\left(\overbar{N}\_{q}\right)\_{n}\left(x\right)=\frac{1}{Q\_{n}}\sum\_{k=1}^{n}q\_{k}x\_{k}$ (2)

dengan $n\in Ν$, dan $τ$ disebut barisan dari $\overbar{N}\_{q}$ (Malkowsy dan Rekocevic, 2$00$1).

Menurut Maddox (197$0$) setiap himpunan tak kosong dari bilangan real yang terbatas ke atas mempunyai supremum. Adapun teorema yang berkaitan dengan supremum suatu barisan diberikan sebagai berikut

Teorema 3.1

Setiap barisan $\left(\overbar{N},q\right)\_{0}, \left(\overbar{N},q\right)$ dan $\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$ merupakan ruang BK terhadap norma

$\left‖x\right‖\_{\overbar{N}\_{q}}=sup\left|\frac{1}{Q\_{n}}\sum\_{k=1}^{n}q\_{k}x\_{k}\right|$ (3)

(Malkowsy dan Rekocevic, 2$00$1).

Menurut Mursaleen dan Norman (2$0$1$0$) untuk setiap ruang barisan domain matriks dari matriks takhinnga A adalah

$X\_{A}=\left\{x\in ω:A\left(x\right)\in X\right\}$ (4)

Berdasarkan matriks domain tersebut didefinisikan ruang barisan berikut

Definisi 3.3

$\left(l\_{\infty }\right)\_{\overbar{N}\_{q}}=\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$ , $\left(c\right)\_{\overbar{N}\_{q}}=\left(\overbar{N},q\right)$ dan $\left(c\_{0}\right)\_{\overbar{N}\_{q}}=\left(\overbar{N},q\right)\_{0}$.

Selajutnya beberapa teorema yang berkaitan dengan sifat relasi pada ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ disajikan sebagai berikut

Teorema 3.2

Ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }≅l\_{\infty }$, $\left(\overbar{N},q\right)≅c$ dan $\left(\overbar{N},q\right)\_{0}≅c\_{0}$

Bukti

Diketahui $\overbar{N}\_{q}$ merupakan matriks segitiga maka mempunyai invers tunggal sehingga dapat dibuat matriks transformasi $L\_{\overbar{N}\_{q}}:\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }\rightarrow l\_{\infty }$ yang didefinisikan dengan $L\_{\overbar{N}\_{q}}\left(x\right)=\overbar{N}\_{q}\left(x\right)$ untuk setiap $x\in \left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$ yang bijektif dan berdasarkan teorema 3.1 maka $\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }≅l\_{\infty }$.

Teorema 3.3. $\left(\overbar{N},∆λ\right)\_{0}⊆\left(\overbar{N},∆λ\right)⊆\left(\overbar{N},∆λ\right)\_{\infty }$ (Salwa, dkk., 2$021$).

Bedasarkan teorema tersebut maka dibangun teorema berikut

Teorema 3.4

Ruang barisan$\left(\overbar{N},q\right)\_{0}⊂\left(\overbar{N},q\right)$ dan $\left(\overbar{N},q\right)⊂\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$

Teorema 3.5

Ruang barisan$\left(\overbar{N},q\right)\_{0}=c\_{0}$ dan $\left(\overbar{N},q\right)=c$ jika $\left(N\_{q}\right)\_{n}\left(x\right)\in c\_{0}$ untuk setiap $x$ di $\left(\overbar{N},q\right)\_{0}$ dan $\left(\overbar{N},q\right)$

Lemma 3.1

$\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }=l\_{\infty }$ jika dan hanya jika $\left(N\_{q}\right)\_{n}\left(x\right)\in l\_{\infty }$ untuk setiap $x$ di $\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$

Teorema 3.6

Ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ adalah subruang tertutup dari ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$.

Teorema 3.7. Jika X ruang barisan maka $M\left(X,cs\right)=X^{β}$ (Malkowsy dan Rekocevic, 2$00$1).

Berdasarkan teorema tersebut maka didefinisikan ruang $β$ dual dari ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ sebagai berikut

Definisi 3.4

Diberikan ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)\_{0}, \left(\overbar{N},q\right) $ dan $\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }$ selanjutnya didefinisikan

1. $M\left(\left(\overbar{N},q\right)\_{0},cs\right)=\left(\overbar{N},q\right)\_{0}^{β}$
2. $M\left(\left(\overbar{N},q\right),cs\right)=\left(\overbar{N},q\right)^{β}$
3. $M\left(\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty },cs\right)=\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }^{β}$

Teorema 3.8

Jika $X$ adalah ruang BK maka $X^{β}$ mrupakan ruang BK (Wilansky, 1984).

Teorema 3.9

Ruang barisan$\left(\overbar{N},q\right)\_{0}^{β}⊂\left(\overbar{N},q\right)^{β}$ dan $\left(\overbar{N},q\right)^{β}⊂\left(\overbar{N},q\right)\_{\infty }^{β}$

1. **Penutup**

Jadi dapat disimpulkan bahwa terdapat bebrapa sifat relasi inklusi pada ruang barisan $\left(\overbar{N},q\right)$ dan terdapat satu sifat yang berkaitan dengan ruang $β$ dualnya. Sehingga sebagai saran penelitian selanjutnya adalah dapat diteliti lebih lanjut relasi inklusi pada ruang $β$ dualnya.

**Daftar Pustaka**

Altay, Bilal and Basar, Feyzi. (2007). Generalization Of The Sequence Spaces $l\left(p\right)$ Derived By Weighted Mean. *J. Math. Anal. Appl.* 330 (2007) 174–185

Basar, Feyzi and Tug, Orhan. (2016). On the Spaces of Norlund Almost Null and Norlund Almost Convergent Sequences. *Faculty of Sciences and Mathematics,University of Niˇs*, Serbia. 30:3, 773–783

Basar, Feyzi. (2013). Survey On The Domain Of The Matrix Lambda In The Normed And Paranormed Sequence Spaces. *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series* A1 Volume 62, Numb er 1, Pages 45.59

Eberhard, Malcowsky. (2013). Measures of noncompactness and some applications. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics.* Vol.1, No.1, 2-19

Eberhard, Malkowsky and V. Rakocevic. $\left(2007\right)$. Measure of noncompacness of linear operator between spaces of sequences that are $\left(\overbar{N}, q\right)$ seummabel or bounded, *Czechoslovac Math. Journal*., 51 $\left(3\right)$ 1146-1163

Godefroy, Gilles. (2001). The Banach Spaces $c\_{0}$. E*xtracta Mathematicae* Vol. 16, Num. 1, 1 – 25

Hadi, Roopaei and Foroutannia, Davound. (2016). A New Sequence Spaces And Norm Of Certain Matrix Operators On This Spaces. *Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA)* Vol. 3 No. 1 (2016), 1-12

I.J. Maddox. (1984). *Elements Of Functional Analysis*, Cambridge: University Press.

Khan, F.M. and Khan, Mushir A. (1994). Matrix Transformation Between Cesaro Sequence Spaces. *Indian J. Pure Appl Math*., 25 (6): 641-645

Mursaleen, M and Noman A.K. $\left(2010\right)$. on the Spaces of $λ-$Convergent and Bounded Sequences, *Thai Journal of Mathematics*, 8 $\left(2\right)$ 311-329

Salwa, dkk., $\left(2021\right)$. $β$-dual dari ruang barisan $\left(\overbar{N},∆λ\right)\_{0}, \left(\overbar{N},∆λ\right) $ dan $\left(\overbar{N},∆λ\right)\_{\infty }$. *Jurnal Matematika* Vol. 11, No.2, Desember 2021, pp. 119-124

Wilansky, Albert. (1984). *Summability Through Functional Analysis*. Amsterdam:North-Holand.

**Ucapan Terimakasih**

Terimakasih disampaikan untuk KPBI Matematika murni yang telah memeberikan dukungan guna mendukung terselesaikannya penelitian ini.