

## Model *Discrete Time Markov Chain (DTMC) Susceptible Infected Recovered (SIR)* Pada Pola Penyebaran Penyakit Cacar Air

Doni Wicaksono<sup>1)</sup>, Respatiwulan<sup>2)</sup>, Yuliana Susanti<sup>3)</sup>

<sup>1), 2), 3)</sup> Statistika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret

<sup>1)</sup>Email : doonnym@student.uns.ac.id

<sup>2)</sup>Email : respatiwulan@staff.uns.ac.id

<sup>3)</sup>Email : yulianasusanti@staff.uns.ac.id

**Abstrak** – *Epidemi adalah penyakit yang muncul pada suatu populasi di suatu daerah dan melebihi keadaan normal dalam waktu singkat. Model epidemi susceptible infected recovered (SIR) merupakan model epidemi yang menggambarkan pola penyebaran penyakit dengan karakteristik individu yang telah sembuh tidak dapat terinfeksi penyakit kembali karena memiliki sistem kekebalan tubuh permanen. Model SIR menggambarkan alur penyebaran penyakit dari suatu kelompok, individu yang rentan terhadap penyakit (susceptible) kemudian menjadi terinfeksi karena menjalin kontak dengan kelompok, individu yang terinfeksi (infected), setelah itu pulih dan memiliki suatu kekebalan permanen dari penyakit yang sama (recovered). Model epidemi SIR yang perubahan banyak individu pada setiap kelompok S dan I mengikuti proses markov waktu diskrit disebut dengan model epidemi discrete time markov chains (DTMC) SIR. Model DTMC SIR merupakan model yang menggambarkan penyebaran penyakit sebagai suatu proses stokastik. Penyakit cacar air dapat ditularkan dengan perantara udara dan kontak langsung. Cacar air merupakan salah satu penyakit yang umum ditemui pada anak-anak namun dapat juga menyerang orang dewasa. Di Indonesia, cacar air diduga sering terjadi pada saat pergantian musim hujan ke musim panas ataupun sebaliknya. Di Amerika, cacar air sering terjadi pada anak-anak dibawah usia 10 tahun dan 5% kasus terjadi pada usia lebih dari 15 tahun. Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur, adalah mencari referensi teori yang relevan dengan permasalahan yang ada dituliskan ini. Tujuan penelitian ini adalah menurunkan ulang dan menerapkan model epidemi DTMC SIR pada penyakit cacar air. Hasil penelitian ini adalah model epidemi DTMC SIR disajikan dalam bentuk probabilitas transisi yang dapat mendeskripsikan pola penyebaran pada penyakit cacar air.*

**Kata Kunci** : *Epidemi, DTMC, SIR, Cacar Air*

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Penyakit menular merupakan salah satu permasalahan yang terjadi dalam kehidupan manusia. Penyakit menular biasanya disebabkan oleh organisme – organisme merugikan yang masuk ke dalam tubuh, seperti virus, bakteri, maupun jamur. Menurut Tuckwell dan Williams (2007), penyakit menular seperti campak (*measles*), cacar air (*chickenpox*), dan gondong (*mumps*) merupakan penyakit menular yang pernah menyebabkan epidemi. Beberapa penyakit menular perlu diwaspadai karena dapat mengakibatkan komplikasi, kerusakan organ tubuh, cacat, kelumpuhan bahkan kematian. Penyakit menular menyebar dengan laju yang tinggi dan menular dari individu satu ke individu yang lain melalui kontak. Individu yang sembuh dari infeksi memiliki sistem kekebalan yang lemah sehingga rentan terinfeksi kembali, sedangkan individu yang memiliki sistem kekebalan yang kuat akan kebal terhadap infeksi.

Menurut Allen (2008), epidemi adalah penyebaran suatu penyakit yang muncul pada suatu populasi di suatu daerah dan melebihi keadaan normal dalam waktu singkat. Epidemi tidak hanya menimbulkan tingginya angka kematian, tetapi juga mengakibatkan kerugian finansial berupa biaya pengobatan dan

perawatan. Penyebaran penyakit-penyakit tersebut dapat mengancam kelangsungan hidup manusia. Oleh karena itu, perlu adanya suatu alat yang dapat mengetahui dan mempelajari pola penyebarannya.

Menurut Zulkoni (2011), cacar air merupakan salah satu penyakit yang umum ditemui pada anak-anak namun dapat juga menyerang orang dewasa. Di Indonesia, cacar air diduga sering terjadi pada saat pergantian musim hujan ke musim panas ataupun sebaliknya. Cacar air merupakan infeksi primer yang terjadi pertama kali pada individu yang berkontak dengan *varicella zoster virus*. Gejala yang ditimbulkan dari penyakit cacar air yaitu sakit kepala, demam, kelelahan ringan kemudian diikuti dengan munculnya ruam pada kulit dan rasa gatal. Menurut Widoyono (2011) infeksi cacar air menyerang semua usia dengan puncak insidensi pada usia 5-9 tahun. 90% pasien cacar air berusia dibawah 10 tahun, sangat sedikit sekali terjadi pada orang dewasa. Kasus cacar air di Amerika diperkirakan mencapai 3,1-3,5 juta per tahunnya. Di Amerika, cacar air sering terjadi pada anak-anak dibawah usia 10 tahun dan 5% kasus terjadi pada usia lebih dari 15 tahun. Sedangkan di Jepang penyakit ini umum terjadi pada anak-anak dibawah usia 6 tahun sebanyak 81,4%. Mengingat kasus cacar air banyak menyerang anak-anak, sifat penularannya yang begitu cepat dan dapat menimbulkan kerugian yang cukup besar. Oleh

karena itu, dibutuhkan suatu cara untuk mengendalikan penyebaran penyakit cacar air agar tidak menjadi wabah dalam suatu populasi.

Model matematika untuk penyakit menular diklasifikasikan menjadi dua kelas, yaitu model yang bersifat deterministik dan model yang bersifat stokastik. Menurut Näsell (2002), kedua model memiliki kelebihan dan kekurangan masing-masing. Sebuah populasi dibagi menjadi beberapa subpopulasi di antaranya sub populasi individu yang rentan terhadap suatu penyakit atau yang disebut dengan *Susceptible* (S), subpopulasi individu yang sudah terinfeksi suatu penyakit tetapi belum bisa menularkannya kepada individu lain atau dapat dikatakan bahwa subpopulasi berada pada masa laten yang disebut dengan *Exposed* (E), subpopulasi individu yang terinfeksi suatu penyakit atau yang disebut dengan *Infected* (I) dan subpopulasi individu yang sembuh dari suatu penyakit atau disebut dengan *Removed* (R). Model epidemi tersebut antara lain adalah *SI*, *SIS*, *SIR* dan *SEIR*. Model-model tersebut memiliki bentuk penyebaran dan karakteristik yang berbeda-beda.

Model epidemi *SIR* adalah model epidemi yang memiliki karakteristik bahwa setiap individu yang rentan terhadap suatu penyakit berinteraksi dengan individu terinfeksi suatu penyakit menular dapat tertular penyakit menular tersebut. Individu yang telah tertular dapat sembuh dengan menggunakan pengobatan medis atau melalui proses alam. Setelah sembuh dari penyakit, individu yang sudah sembuh dari penyakit akan kebal terhadap penyakit.

Model epidemi stokastik memperhitungkan variasi perhitungan pada suatu epidemi yang diambil secara probabilitas. Model deterministik tidak mempertimbangkan pengaruh acak dari individu. Sedangkan pada model stokastik, pengaruh acak dari individu dipertimbangkan, sehingga pada model stokastik menggunakan peluang dalam memodelkan.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang penyebaran penyakit menggunakan model stokastik. Pembentukan model mengacu pada Allen (2008), model epidemi *SIR* ditinjau secara probabilistik dan dilihat dari segi waktu ada dua jenis, yaitu *Continuous Time Markov Chain (CTMC) SIR* dan *Discrete Time Markov Chain (DTMC) SIR*. Model *CTMC SIR* mengkaji perubahan jumlah individu terinfeksi dalam selang waktu kontinu, sedangkan model *DTMC SIR* mengkaji perubahan jumlah individu terinfeksi dalam selang waktu diskrit. Pada penelitian ini, penulis akan

mempelajari pola penyebaran penyakit ditinjau secara probabilistik melalui model *DTMC SIR*.

Suatu epidemi diharapkan berhenti sebelum menginfeksi seluruh individu dalam populasi  $N$  karena dapat menimbulkan kerugian yang cukup besar. Suatu epidemi dinyatakan berakhir jika tidak ada lagi individu yang terinfeksi atau jumlah individu terinfeksi sama dengan nol. Epidemi dapat dihentikan dengan menentukan besarnya probabilitas berhentinya epidemi. Asumsinya hanya ada satu individu awal yang terinfeksi dan masing-masing individu terinfeksi saling independen.

## 1.2 Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah menurunkan ulang model *Discrete Time Markov Chain (DTMC) SIR*.

## LANDASAN TEORI

### 2.1 Tinjauan Pustaka

Untuk menyelesaikan perumusan masalah perlu diuraikan terlebih dahulu beberapa hal yang mendasari penelitian ini. Kermack dan McKendrick (1927) memperkenalkan model epidemi *SIR* untuk pertama kali. Model *SIR* menjelaskan tentang penyebaran penyakit, dengan individu yang sembuh dari penyakit tidak akan terinfeksi kembali karena memiliki kekebalan.

Allen dan Burgin (2000) pada tahun 1998 meneliti tentang model deterministik dan stokastik *SIS* dan *SIR* pada waktu diskrit. Pada artikelnya dijelaskan model *SIS* dan *SIR* dengan ukuran populasi konstan, serta model umum *SIS* dengan ukuran populasi berubah-ubah setiap waktu.

Tuckwell dan William (2007) pada tahun 2005 meneliti model *SIR* secara probabilistik dengan populasi konstan. Pada model ini probabilitas transisi individu dari individu yang rentan menjadi terinfeksi berbentuk distribusi binomial.

Ofori (2011) meneliti tentang epidemiologi dari penyakit cacar air dengan mengambil kasus di kota Ghana. Model yang digunakan dalam penelitiannya yaitu model *SIR* dengan memperhatikan laju kelahiran dan laju kematian alami yang terjadi dalam

populasi. Berdasarkan simulasi model disimpulkan bahwa penyakit cacar air akan menjadi endemik di kota Ghana dengan rata-rata laju penularan  $\beta = 1.4588$  dan *Basic Reproductive Number*  $R_0 = 1.078$

Esson *et al.* (2014) meneliti tentang epidemiologi dari penyakit cacar air di kota Agona Barat, Ghana dengan menggunakan model *SEIR*. Model menggunakan asumsi bahwa laju kelahiran sama dengan laju kematian. Analisis stabilitas dilakukan dengan simulasi model menunjukkan bahwa tingkat laten lebih sensitif terhadap model dari pada tingkat penularan dan tingkat kesembuhan.

Salah satu penelitian yang telah membahas mengenai model epidemi secara probabilistik dengan menentukan probabilitas berhentinya epidemi dan probabilitas puncak epidemi dilakukan oleh Allen (2008). Pada penelitian ini terlebih dahulu menentukan probabilitas berakhirnya epidemi, kemudian melakukan penurunan ulang untuk menentukan probabilitas puncak epidemi.

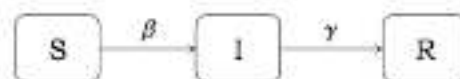
## 2.2 Model Epidemi SIR

Pada model epidemi *SIR*, banyaknya individu pada waktu  $t$  untuk masing-masing kelompok dinyatakan sebagai  $S(t)$  yaitu banyaknya individu sehat yang rentan terhadap penyakit pada waktu  $t$ ,  $I(t)$  yaitu banyaknya individu yang terinfeksi penyakit pada waktu  $t$ ,  $R(t)$  yaitu banyaknya individu yang telah sembuh pada waktu  $t$ . Asumsi yang digunakan dari model *SIR* adalah

1. Penyakit menyebar pada populasi tertutup yaitu berarti tidak ada individu yang masuk maupun keluar dari populasi tersebut.
2. Populasi homogen.
3. Hanya ada satu penyakit yang menyebar dalam populasi tersebut.
4. Laju kelahiran dan kematian sama.

Model *SIR* menggambarkan alur penyebaran penyakit dari suatu kelompok, individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible*) kemudian menjadi terinfeksi karena menjalin kontak dengan kelompok, individu yang terinfeksi (*infected*), setelah itu pulih dan memiliki suatu kekebalan permanen dari penyakit yang sama (*recovered*). Pada model *SIR*, penyebaran penyakit terjadi apabila terdapat perpindahan

individu dari kelompok  $S$  ke  $I$  dengan laju penularan sebesar  $\beta$  dan dari kelompok  $I$  ke  $R$  dengan laju kesembuhan sebesar  $\gamma$ , yang ditunjukkan oleh Gambar (2.1). Setiap individu *susceptible* akan menjadi terinfeksi apabila berinteraksi dengan individu *infected* dengan laju penularan sebesar  $\beta$ , sedangkan nilai parameter  $\gamma$  menunjukkan besarnya laju kesembuhan pada kelompok *infected*.



Gambar 2.1 Skema Model *SIR*

## 2.3 Proses Stokastik

Menurut Allen (2008), proses stokastik adalah kumpulan variabel acak  $\{X_t, t \in T, s \in S\}$ , dimana  $T$  adalah himpunan indeks dan  $S$  adalah jangka waktu yang dimiliki sampel pada umumnya dari variabel acak. Untuk setiap  $t$ ,  $X_t(s)$  menunjukkan satu variabel acak yang didefinisikan oleh  $S$ . Untuk setiap  $s \in S$ ,  $X_t(s)$  berhubungan dengan fungsi yang didefinisikan pada  $T$  yang disebut *sample path* atau *stochastic realization* dari proses. Menurut Praptono (1986) proses stokastik adalah himpunan variabel acak yang merupakan fungsi waktu (*time*) atau sering pula disebut dengan proses acak (*random process*).

## 2.3 Proses Markov

Menurut Allen (2008), sebuah proses stokastik Markov adalah proses stokastik dimana kejadian yang akan datang dari suatu sistem hanya bergantung pada waktu yang sedang terjadi (waktu kini) dan tidak pada waktu lampau.

- a. Sebuah proses stokastik waktu diskrit  $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$  disebut memiliki sifat Markov jika

$$P(X_n = i_n | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}), \text{ dimana nilai } i_k \in \{1, 2, \dots\} \text{ untuk } k = 0, 1, 2, \dots, n. \text{ Maka proses stokastik disebut rantai Markov atau lebih spesifiknya rantai Markov waktu diskrit. Hal ini disebut dengan rantai Markov waktu terbatas atau rantai Markov terbatas jika jangka waktunya terbatas.}$$

- b. Suatu proses stokastik  $\{X(t), t \in [0, \infty)\}$ , dikatakan rantai Markov waktu kontinu jika memenuhi kondisi berikut: untuk setiap urutan dari bilangan riil yang memenuhi  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$ ,

$$P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) \text{ sama dengan } P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} | X(t_n) = i_n)$$

Menurut Praptono (1986) *state* dalam ruang *state* rantai Markov mempunyai sifat berlainan, yaitu *absorbing state*, *recurrent state*, dan *transient state*.

- c. Suatu *state*  $a \in S$  pada suatu rantai Markov disebut *absorbing state* apabila  $P(a, a) = 1$  atau  $P(a, y) = 0$  untuk  $y \neq a$ .
- d.  $\rho_{xy} = P_x(T_y < \infty)$  menunjukkan probabilitas rantai Markov bermula dari  $x$  akan mencapai  $y$  pada suatu waktu yang berhingga. Keadaan khusus

$\rho_{yy} = P_y(T_y < \infty)$  menunjukkan probabilitas rantai Markov bermula dari  $y$  akan pernah kembali ke  $Y$  lagi. Suatu *state*  $y \in S$  disebut *recurrent* apabila  $\rho_{yy} = 1$ , dan *transient* apabila  $\rho_{yy} < 1$ .

## 2.5 Penyakit Cacar Air

Penyakit cacar air disebabkan oleh *varicella zoster virus*, yang dapat ditularkan dengan perantara udara dan kontak langsung. Penyakit ini mempunyai pola penyebaran penyakit dengan karakteristik setiap individu yang sembuh memiliki kekebalan tubuh yang permanen sehingga tidak dapat terinfeksi kembali.

Cacar air merupakan salah satu penyakit yang umum ditemui pada anak-anak namun dapat juga menyerang orang dewasa. Di Indonesia, cacar air diduga sering terjadi pada saat pergantian musim hujan ke musim panas ataupun sebaliknya. Di Amerika, cacar air sering 3 terjadi pada anak-anak dibawah usia 10 tahun dan 5% kasus terjadi pada usia lebih dari 15 tahun. Sedangkan di Jepang penyakit ini umum terjadi pada anak-anak dibawah usia 6 tahun sebanyak 81,4%. Mengingat kasus cacar air banyak menyerang anak-anak, sifat penularannya yang begitu cepat dan dapat menimbulkan kerugian yang cukup besar.

## METODE

Metode yang digunakan dalam penulisan ini adalah studi literatur, adalah mencari referensi teori yang relevan dengan permasalahan yang ada dituliskan ini. Referensi ini dapat didapat dari buku, artikel ilmiah, jurnal – jurnal, maupun situs di internet yang relevan dengan penulisan ini. Tujuannya adalah memperkuat perumusan masalah dan sebagai landasan teori untuk menurunkan, menerapkan dan menginterpretasikan model epidemi. Langkah – langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

1. Menurunkan ulang model *DTMC SIR*.
  - a. Menjelaskan fenomena penyebaran penyakit model *DTMC SIR*.
  - b. Menentukan asumsi model *DTMC SIR*.
  - c. Menentukan probabilitas transisi.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyebaran penyakit terjadi ketika individu rentan penyakit melakukan kontak dengan individu yang terinfeksi penyakit. Pada beberapa jenis penyakit, individu yang telah sembuh dari infeksi tidak dapat terinfeksi penyakit kembali karena memiliki system kekebalan tubuh permanen. Model matematika penyebaran penyakit yang sesuai dengan karakteristik tersebut adalah model *susceptible infected recovered (SIR)*. Dalam model ini populasi dikelompokkan menjadi tiga, yaitu kelompok *susceptible (S)* kelompok individu sehat yang memiliki resiko untuk terinfeksi penyakit, kelompok *infected (I)* kelompok individu yang terinfeksi penyakit, dan *recovered (R)*.

Penurunan ulang model epidemi *SIR* mengacu pada Allen (2000). Model epidemi diturunkan dengan menggunakan suatu asumsi. Asumsi yang digunakan dalam model *SIR* adalah sebagai berikut:

1. Penyakit menyebar pada populasi tertutup yaitu berarti tidak ada individu yang masuk maupun keluar dari populasi tersebut.
2. Populasi homogen.
3. Hanya ada satu penyakit yang menyebar dalam populasi tersebut.
4. Laju kelahiran dan kematian sama.

Banyaknya individu pada kelompok  $S$ ,  $I$ , dan  $R$  pada waktu  $t$  masing-masing dinyatakan dengan  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,

dan  $R(t)$ . Populasi diasumsikan konstan, sehingga jumlah individu pada populasi tersebut tetap atau  $S(t) + I(t) + R(t) = N$  dengan  $N$  adalah total jumlah individu pada populasi. Populasi bercampur secara homogen, artinya setiap individu  $S$  memiliki kesempatan yang sama untuk terinfeksi penyakit.

Model epidemi  $DTMC$   $SIR$  merupakan *bivariate process* karena ada dua variabel acak independen,  $S(t)$  dan  $I(t)$ . Variabel acak  $R(t) = N - S(t) - I(t)$ . The *bivariate process*  $\{(S(t), I(t))\}_{i=0}^{\infty}$  mempunyai fungsi probabilitas bersama

$$p_{(s,i)}(t) = P[S(t) = s, I(t) = i] \quad (1)$$

dengan  $s, i = 0, 1, 2, \dots, N$  dan  $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$

Probabilitas transisi dapat didefinisikan berdasarkan asumsi dalam formulasi deterministik  $SIR$ . Banyaknya individu *susceptible* dan *infected* dapat berubah setiap waktu. Jika besarnya perubahan banyaknya individu *susceptible* pada selang waktu  $\Delta t$  yaitu  $k$ , dan besarnya perubahan banyaknya individu *infected* pada selang waktu  $\Delta t$  yaitu  $j$ , maka perpindahan dari *state*  $s$  ke  $s+k$  dan *state*  $i$  ke  $i+j$  disebut transisi. Probabilitas transisi dinyatakan sebagai:

$$P_{(s+k, i+j), (s, i)}(\Delta t) = \text{Prob}\{(\Delta S, \Delta I) = (k, j) | (S(t), I(t)) = (s, i)\} \quad (2)$$

dimana  $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ .

Diasumsikan bahwa  $\Delta t$  dapat dipilih cukup kecil sehingga paling banyak satu perubahan dalam *state* terjadi selama interval waktu  $\Delta t$ , dengan  $\Delta t$  merupakan satu kali periode terinfeksi. Khususnya, bisa ada infeksi baru, kelahiran, kematian, atau kesembuhan.

Individu dari kelompok *susceptible* mengalami perpindahan kondisi ke kelompok *infected*, artinya terjadi transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s - 1, i + 1)$ . Perpindahan ini terjadi akibat penularan penyakit oleh individu *infected* kepada individu *susceptible*. Jika terdapat sebanyak  $i$  individu *infected* dalam populasi  $N$ , maka probabilitas individu *infected* yang melakukan kontak dengan individu *susceptible* sebesar  $\frac{i}{N}$ . Jika

besarnya laju kontak atau penularan dimisalkan  $\beta$ , maka besarnya probabilitas transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s - 1, i + 1)$  adalah

$$P_{(s-1, i+1), (s, i)}(\Delta t) = \beta \frac{i}{N} s \Delta t \quad (3)$$

Individu dari kelompok *infected* mengalami perpindahan kondisi ke kelompok *recovered*, artinya terjadi transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s, i - 1)$ . Perpindahan ini terjadi akibat individu *infected* mengalami kesembuhan. Jika besarnya laju kesembuhan dimisalkan  $\gamma$ , maka besarnya probabilitas transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s, i - 1)$  adalah

$$P_{(s, i-1), (s, i)}(\Delta t) = \gamma i \Delta t \quad (4)$$

Kelompok *infected* mengalami pengurangan individu, artinya terjadi transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s + 1, i - 1)$ . Pengurangan ini terjadi akibat satu individu *infected* mengalami kematian. Jika besarnya laju kematian dimisalkan  $b$ , maka besarnya probabilitas transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s + 1, i - 1)$  adalah

$$P_{(s+1, i-1), (s, i)}(\Delta t) = b i \Delta t \quad (5)$$

Kelompok *susceptible* mengalami penambahan individu, artinya terjadi transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s + 1, i)$ . Penambahan ini terjadi akibat adanya kelahiran baru satu individu yang dikategorikan masuk dalam kelompok *susceptible*. Jika besarnya laju kelahiran dimisalkan  $b$ , maka besarnya probabilitas transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s + 1, i)$  adalah

$$P_{(s+1, i), (s, i)}(\Delta t) = b(N - s - i) \Delta t \quad (6)$$

Ketika masing-masing kelompok tidak mengalami penambahan atau pengurangan banyaknya individu, artinya tidak terjadi perubahan *state*. Besarnya probabilitas transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s, i)$  dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah

$$P_{(s, i), (s, i)}(\Delta t) = 1 - \left[ \beta \frac{i}{N} s + \gamma i + b(N - s) \right] \Delta t$$

(7) Sehingga probabilitas transisi model epidemi DTMC SIR dituliskan sebagai:

Perpindahan individu dari suatu *state* ke *state* yang lain dimungkinkan hanya satu individu yang bertransisi dalam selang waktu yang sangat kecil. Oleh karena itu, besarnya probabilitas transisi dengan banyaknya individu yang berpindah lebih dari satu atau lebih dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah nol.

$$p_{(s+k,i+j)(s,i)}(\Delta t)$$

$$= \begin{cases} \beta \frac{i}{N} s \Delta t & (k, j) = (-1, 1), \\ \gamma i \Delta t & (k, j) = (0, -1), \\ b i \Delta t & (k, j) = (1, -1), \\ b(N - s - i) \Delta t & (k, j) = (1, 0), \\ 1 - \left[ \beta \frac{i}{N} s + \gamma i + b(N - s) \right] \Delta t & (k, j) = (0, 0), \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

(8)

Keterangan:

$b$  = laju kelahiran dan kematian

$\beta$  = laju kontak atau penularan

$\gamma$  = laju kesembuhan

## KESIMPULAN

Model epidemi DTMC SIR merupakan probabilitas transisi dari *state*  $(s, i)$  ke *state*  $(s + k, i + j)$  yang dinyatakan dalam persamaan (8). Dari persamaan (8) dapat ditentukan banyaknya individu kelompok *susceptible*, *infected*, dan *recovered* pada waktu tertentu dengan memberikan nilai awal terlebih dahulu.

## SARAN

Pada penelitian ini dibahas model DTMC SIR dengan asumsi populasi konstan atau tidak memperhatikan faktor imigrasi dan masa inkubasi penyakit. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, model tersebut dapat dikembangkan lebih lanjut menjadi model dengan populasi tidak konstan dan atau memperhatikan pengaruh masa inkubasi penyakit.

## DAFTAR PUSTAKA

- Allen, L. J. S. *An Introduction to Stochastic Epidemic Models*. Departement of Mathematics and Statistics, Texas Tech University. Texas. 2008.
- Allen, L. J. S., and A. M. Burgin. *Comparison of Deterministic and Stochastic SIS and SIR Models in Discrete Time*. *Mathematical Bioscience*. 2000. no. 163: 1-33.
- Esson, A. B., W. Obeng-Denteh, B. Barnes, and G. E. Ntherful. *Vaccination Dynamics of Chickenpox in Agona West Municipality of Ghana*. *British Journal of Mathematics Computer Science* 4. 2014. no. 14, 2036-2045
- Johnson, T. *Mathematical Modeling of Diseases: Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Model*. Math 4901 Senior Seminar. 2009.
- Kermack, W. O., and A. G. Mckendrick. *A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics*. Proceedings of The Royal Society of London. 1927.
- Mode, C. J., and C. K. Sleeman. *Stochastic Processes in Epidemiology*. Singapore: World Scientific. 2000.
- Nåsell, I. *Stochastic Models of Some Endemic Infections*. *Mathematical Biosciences*. 2002. no. 179: 1-19.
- Ofori, M. M. *Mathematical Modelling of The Epidemiology of Varicella*. Kwame Nkrumah



- University of Science and Technology  
Kumasi, Ghana. 2011.
- Parzen, E. *Stochastic Processes*. Holden-Day, Inc,  
United States of America. 1962.
- Praptono. *Materi Pokok Pengantar Proses Stokastik I*.  
Jakarta: Karunika. 1986.
- Tuckwell, H. C., and R. J. Williams. *Some Properties  
of a Simple Stochastic Epidemic Model of SIR Type*.  
*Mathematical Biosciences*. 2007. no. 208: 76-97.
- Widoyono. *Penyakit Tropis: Epidemiologi, Penularan,  
Pencegahan dan Pemberantasannya*. Jakarta:  
Penerbit Erlangga. 2011.
- Zulkoni Akhsin. *Parasitologi*. Yogyakarta: Nuha  
medika. 2011.



## PROSIDING

SEMINAR NASIONAL SAINS DAN ENTREPRENEURSHIP VI TAHUN 2019

"Tingkatkan Role of the Faculty for the Multiple SDN Program Sustainability (Studi Kasus: ITS) dan  
Indikator Sains Entrepreneurship"

Semarang, 21 Agustus 2019

ISBN : 978-602-99975-3-8